2017

MATHEMATICS

(General)

(Classical Algebra and Trigonometry)

Full Marks : 60

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

Answer either *in English* or *in Assamese*

PART—I

1. Answer the following questions : $1\times7=7$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) $f(x)=0$ is a cubic equation and $(x+\alpha)$ is a factor of $f(x)$. Write all the roots of the equation $f(x)=0$ if $\gamma+i\beta$ is one of the roots.

$f(x)=0$ এটা ত্ৰিঘাত সমীকৰণ আৰু $f(x)$ৰ এটা উৎপাদক $(x+\alpha)$. $f(x)=0$ সমীকৰণৰ আটাইবোৰ মূল লিখা যদি $\gamma+i\beta$ এটা মূল হয়।

(b) Write true or false for the following statement :

তলত দিয়া উক্তিটোৰ বাবে সত্য বা অসত্য লিখা :

$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ where (য'ত) z_1, z_2 are any complex numbers (যি কোনো জটিল সংখ্যা)।

(c) If (যদি) $z = \bar{z}$, then (তেন্তে) $I_m z = ?$
Where (য'ত) z is complex number (জটিল সংখ্যা).

(d) State De Moiver's theorem.
ডি মইভাৰৰ উপপাদ্যটো লিখা।

(e) If α, β, γ are the roots of $cx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$, then find the equation whose roots are $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$.

$cx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ সমীকৰণটোৰ মূল α, β আৰু γ হ'লে $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ মূলযুক্ত সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা।

(f) If $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ are the roots of $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, then find the value of $\Sigma\alpha_1^2$.

$x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকৰণৰ মূলকেইটা $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ হ'লে $\Sigma\alpha_1^2$ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(g) Find the limit of the following sequence :
তলৰ অনুক্ৰমটোৰ সীমা উলিওৱা :

$$u_n = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$$

PART—II

2. Answer the following questions : 2×4=8
তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Find $\mathrm{mod}\, z$ and $\arg z$, where $z = -i$.
$z = -i$ হ'লে $\mathrm{mod}\, z$ আৰু $\arg z$ নিৰ্ণয় কৰা।

(b) If a, b, c are real, then prove that

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

যদি a, b, c বাস্তৱ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

(c) Test the convergence of the following series whose nth term is given by

$$u_n = (-1)^n$$

তলৰ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা যাৰ nতম পদটো

$$u_n = (-1)^n$$

(d) If the sum of two roots of the equation $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ is 0, then prove that $a_1a_2 = a_3$.
$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ সমীকৰণৰ দুটা মূলৰ যদি যোগফল শূন্য হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $a_1a_2 = a_3$.

PART—III

3. Answer any *three* of the following questions : 5×3=15

তলৰ যি কোনো তিনিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

(a) If (যদি) $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $y = \cos\beta + i\sin\beta$, $z = \cos\gamma + i\sin\gamma$ and (আৰু) $x + y + z = 0$, then show that (তেন্তে দেখুওৱা যে)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$$

(b) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$i^i = e^{-(4n+1)\pi/2}$$

(c) Show that (দেখুওৱা যে)

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{9\cdot 11} + \ldots$$

(d) If (যদি) $\sinh(u + iv) = x + iy$, then prove that (তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\frac{x^2}{\sinh^2 u} + \frac{y^2}{\cosh^2 u} = 1$$

(e) If (যদি) $A + iB = \log(x + iy)$, then show that (তেন্তে দেখুওৱা যে)

$$A = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2), \quad B = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

PART—IV

4. Answer *either (a) or (b)* : 10

(a) অথবা *(b)*ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) *(i)* Apply Cauchy-Schwarz inequality to prove that

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) \geq 9$$

where a, b, c and x, y, z are positive real numbers. 4

কচি-শ্বাৰ্জৰ অসমতাৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰা যে

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) \geq 9$$

য'ত a, b, c আৰু x, y, z ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা।

(ii) Test the convergence of the following series : 6

তলৰ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতাৰ পৰীক্ষা কৰা :

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^3}{5} + \ldots$$

(b) *(i)* If (যদি) $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ and (আৰু) $a + b + c = 1$, then prove that (তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে)

$$8abc \leq (1-a)(1-b)(1-c) \leq \frac{8}{27}$$ 4

(ii) Define absolutely convergent series with an example.

Examine the convergence of the following infinite series :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots \text{ to } \infty$$

Show that it is conditionally convergent. 2+3+1=6

উদাহৰণসহ পৰম অভিসাৰী শ্ৰেণীৰ সংজ্ঞা দিয়া।

তলত দিয়া অসীম শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতাৰ পৰীক্ষা কৰা :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots \text{ to } \infty$$

দেখুওৱা যে ই চৰ্তসাপেক্ষে অভিসাৰী।

5. *(a)* Solve by Cardan's method : 6

কাৰ্ডনৰ নিয়মেৰে সমাধা কৰা :

$$x^3-30x+133=0$$

(b) *(i)* If α, β, γ are the roots of the equation $x^3-px^2+qx-r=0$, form an equation whose roots are $\beta\gamma+\frac{1}{\alpha}$, $\gamma\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\alpha\beta+\frac{1}{\gamma}$. 4

$x^3-px^2+qx-r=0$ সমীকৰণৰ মূলকেইটা α, β, γ হ'লে $\beta\gamma+\frac{1}{\alpha}$, $\gamma\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\alpha\beta+\frac{1}{\gamma}$ মূলযুক্ত সমীকৰণ এটা গঠন কৰা।

Or / নাইবা

(ii) If α, β, γ are the roots of the equation $x^3+px^2+qx+r=0$, then find the value of $\Sigma\alpha^3\beta^3$.

যদি α, β, γ, $x^3+px^2+qx+r=0$ সমীকৰণটোৰ বীজ হয়, তেন্তে $\Sigma\alpha^3\beta^3$ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

6. Answer *either (a)* and *(b) or (a)* and *(c)* :
(a) আৰু *(b)* অথবা *(a)* আৰু *(c)*ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) If *a*, *b*, *c* denote the sides of a triangle and $2s=a+b+c$, then prove that

$$abc \geq 8(s-a)(s-b)(s-c)$$ 4

যদি *a*, *b*, *c* কোনো ত্ৰিভুজৰ বাহু হয় আৰু $2s=a+b+c$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$abc \geq 8(s-a)(s-b)(s-c)$$

(b) Examine if the sequence $\{u_n\}$, where $u_n=\left\{\frac{1}{n}+2(-1)^n\right\}$ is bounded and has a limit. Is it a convergent sequence? 2+2+2=6

$\{u_n\}$ অনুক্ৰমটোৰ পৰিৱদ্ধ হয় নে নহয় আৰু সীমা আছেনে নাই পৰীক্ষা কৰা য'ত $u_n=\left\{\frac{1}{n}+2(-1)^n\right\}$ এইটো অভিসাৰী অনুক্ৰম হয়নে?

(c) State Sandwich theorem and applying this theorem prove that

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$$

1+5=6

ছেন্দউইছৰ উপপাদ্যটো লিখা আৰু এই উপপাদ্যটো প্ৰয়োগ কৰি প্ৰমাণ কৰা যে

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$$

★★★