

2016

MATHEMATICS

(General)

Paper : 5.1

(Statics and Dynamics)

Full Marks : 80

Time : 3 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

Answer either in English or in Assamese

1. Answer the following questions : $1 \times 10 = 10$
তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) What is the whole effect of a couple acting on a body?

এটা পিণ্ডৰ ওপৰত ক্ৰিয়াশীল বলযুগ্ম এটাৰ সমুদায় প্ৰতিক্ৰিয়া কি ?

(b) What is the position of the point of action of the resultant of two equal like parallel forces acting on a rigid body?

এটা দৃঢ় পিণ্ডৰ ওপৰত ক্ৰিয়াশীল দুটা সমমানৰ সমমুখী সমান্তৰাল বলৰ লব্ধ বলে ক্ৰিয়া কৰা বিন্দুৰ অৱস্থান কি ?

(2)

- (c) A system of coplanar forces acting on a rigid body are such that the algebraic sum of their moments about each of any three non-collinear points in their plane are separately zero. Will the system of forces be in equilibrium?

এটা দৃঢ় পিণ্ডৰ ওপৰত ক্ৰিয়াশীল এটা সামতলিক বল প্ৰণালী এনেকুৱা যে বলবোৰৰ সমতলৰ একে বেৰাত নথকা যি কোনো তিনিটা বিন্দু সাপেক্ষে সিহঁতৰ বল ভ্ৰামকৰ বীজগণিতীয় সমষ্টি বেলেগে বেলেগে শূন্য। বল প্ৰণালীটো সাম্যাৱস্থাত থাকিবনে ?

- (d) What is the position of CG of a uniform rod?

এটা সুমম দণ্ডৰ ভাৰকেন্দ্ৰৰ অৱস্থান কি ?

- (e) Write the definition of force of friction.

ঘৰ্ষণ বলৰ সংজ্ঞা লিখা।

- (f) Write down the expressions for radial and cross-radial accelerations of a particle moving in a plane curve at any point (r, θ) on it.

সমতলস্থ কোনো বক্ৰৰে গতি কৰা বস্তুকণা এটাৰ গতিপথৰ যি কোনো বিন্দু (r, θ) ত অৰীয় (radial) আৰু তিৰ্যক (cross-radial) ভ্ৰমণ লিখা।

(Continued)

A7/69

(3)

- (g) If the velocities of the particles P and Q be u and v in directions making angles α and β with the x -axis, write down the relative velocity of P with respect to Q .

P আৰু Q বস্তুকণা দুটাৰ বেগ u আৰু v ৰ দিশে x -অক্ষৰ লগত ক্ৰমে α আৰু β কোণ কৰিলে Q সাপেক্ষে P ৰ আপেক্ষিক বেগ লিখা।

- (h) A particle is moving in a plane curve. Write down the relation between its angular velocity and linear velocity.

এটা বস্তুকণাই এটা সমতলীয় বক্ৰৰে গতি কৰি আছে। ইয়াৰ কৌণিক বেগ আৰু বৈখিক বেগৰ মাজৰ সম্পৰ্কটো লিখা।

- (i) If u be the velocity of projection and α be the angle of projection of a particle, write down the expression for the time of flight.

এটা বস্তুকণাৰ প্ৰক্ষেপ বেগ u আৰু প্ৰক্ষেপ কোণ α হ'লে ইয়াৰ উৰণকাল লিখা।

- (j) State the principle of conservation of linear momentum.

বৈখিক ভৰবেগৰ সংৰক্ষণশীলতাৰ তত্ত্বটো লিখা।

A7/69

(Turn Over)

(4)

2. Answer the following questions : $2 \times 5 = 10$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) Two men are carrying a straight uniform bar 6 metres long and weighing 30 kg. One man supports it at a distance of 1 metre from one end, and the other man at a distance of 2 metres from the other end. What weight does each man bear?

দুজন মানুহে 30 kg ওজনৰ 6 মিটাৰ দীঘল সুষম দণ্ড এডাল কঢ়িয়াই আছে। এজনে দণ্ডডালৰ এটা মূৰৰ পৰা 1 মিটাৰ আৰু আনজনে আনটো মূৰৰ পৰা 2 মিটাৰ ভিতৰত ধৰি থাকিলে, প্ৰতিজনে কিমান ওজন বহন কৰিব ?

- (b) Define coefficient of friction and angle of friction.

ঘৰ্ষণ গুণাংক আৰু ঘৰ্ষণ কোণৰ সংজ্ঞা লিখা।

- (c) Prove that the CG of a body is unique.

কোনো এটা পিণ্ডৰ ভাৰকেন্দ্ৰ অদ্বিতীয় বুলি প্ৰমাণ কৰা।

- (d) A particle moves in a straight line according to the law $v^2 = 6a(x \sin x + \cos x)$, where x is its distance from a fixed point on the line. Find its acceleration.

(Continued)

A7/69

(5)

এটা বস্তুকণাই $v^2 = 6a(x \sin x + \cos x)$ নিয়মানুসৰি সৰলৰেখাত গতি কৰে, য'ত x বেখাডালৰ ওপৰত থকা এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুৰ পৰা ইয়াৰ দূৰত্ব। ইয়াৰ ত্বৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

- (e) Prove that the impulse of a force is equal to the change in momentum due to the application of the force.

প্ৰমাণ কৰা যে বল এটাৰ আৰেগ, বল প্ৰয়োগৰ ফলত হোৱা ভৰবেগৰ পৰিৱৰ্তনৰ সমান।

3. Answer the following questions : $5 \times 4 = 20$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) Prove that any system of coplanar forces acting on a rigid body can ultimately be reduced either to a single force or to a single couple unless the system is in equilibrium.

এটা দৃঢ় পিণ্ডৰ ওপৰত ক্ৰিয়াশীল সমতলীয় বল প্ৰণালী এটাক অৱশেষত এটা বল অথবা এটা বলযুগ্মত পৰিণত কৰিব পাৰি বুলি প্ৰমাণ কৰা, যদিহে বল প্ৰণালীটো সাম্যাৱস্থাত নাথাকে।

Or / নাইবা

Prove that if three coplanar forces acting upon a rigid body keep it in equilibrium, they must meet at a point or be parallel.

A7/69

(Turn Over)

(6)

যদি তিনিটা সামতলিক বলে ক্রিয়া কৰি এটা দৃঢ় পিণ্ডক সাম্যাবস্থাত বাখে, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে বল তিনিটা এটা বিন্দুত মিলিত হয় বা সিহঁত সমান্তৰাল হয়।

- (b) A uniform ladder rests in limiting equilibrium with one end on a rough floor, whose coefficient of friction is μ and with the other end against a smooth vertical wall, show that its inclination to the vertical is $\tan^{-1}(2\mu)$.

এটা সুষম জখলাৰ এটা মূৰ খহটা মজিয়াত আৰু আনটো মূৰ এখন নিমজ উলম্ব দেয়ালত লাগি চৰম সাম্যাবস্থাত আছে। যদি খহটা মজিয়াৰ ঘৰ্ষণ গুণাংক μ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে চৰম সাম্যাবস্থাত জখলাডালে উলম্ব দেয়ালৰ লগত $\tan^{-1}(2\mu)$ কোণ কৰিব।

- (c) Define simple harmonic motion (SHM). The position of a particle moving in a straight line is given by $x = a \cos nt + b \sin nt$. Prove that it executes SHM and its amplitude is $\sqrt{a^2 + b^2}$.

সবল সমঞ্জস গতিৰ সংজ্ঞা দিয়া। সবলবেধাত গতি কৰি থকা এটা বস্তুকণাৰ অৱস্থান $x = a \cos nt + b \sin nt$. প্রমাণ কৰা যে ই সবল সমঞ্জস গতি কৰে আৰু ইয়াৰ বিস্তাৰ $\sqrt{a^2 + b^2}$.

(7)

- (d) A point moves in a circle of radius r with a speed v . Prove that its angular velocity about the centre is uniform and is equal to $\frac{v}{r}$.

r ব্যাসাৰ্ধৰ এটা বৃত্তত এটা বিন্দুৱে v দ্ৰুতিৰে চলাচল কৰে। প্রমাণ কৰা যে কেন্দ্ৰ সাপেক্ষে ইয়াৰ কৌণিক বেগ সুষম আৰু $\frac{v}{r}$ ৰ সমান।

Or / নাইবা

A particle is projected from a point O so as to pass through two given points in the same vertical plane with O , at heights h_1 and h_2 above O , and at horizontal distances d_1 and d_2 from O on the same side. Show that the range of projection is

$$\tan^{-1} \left\{ \frac{d_1^2 h_2 - d_2^2 h_1}{d_1 d_2 (d_1 - d_2)} \right\}$$

O বিন্দুৰ পৰা এটা বস্তুকণা এনেদৰে প্রক্ষেপ কৰা হ'ল যাতে বস্তুকণাটো O বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা এখন সমতলৰ O বিন্দুৰ পৰা h_1 আৰু h_2 উচ্চতাত আৰু O বিন্দুৰ একেফালে d_1 আৰু d_2 অনুভূমিক দূৰত্বত থকা দুটা বিন্দুৰ মাজেৰে পাৰ হৈ যায়। দেখুওৱা যে বস্তুকণাটোৰ প্রক্ষেপ কোণৰ মান

$$\tan^{-1} \left\{ \frac{d_1^2 h_2 - d_2^2 h_1}{d_1 d_2 (d_1 - d_2)} \right\}$$

4. Answer either (a) or (b) :

(a) অথবা (b) ব উত্তৰ কৰা :

(a) (i) Find the CG of the area of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ lying in the first quadrant.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তৰ প্ৰথম চ'কত থকা ক্ষেত্ৰৰ ভাৰকেন্দ্ৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) Find the CG of the sector of the circle $x^2 + y^2 = a^2$ lying in the first quadrant.

$x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তৰ প্ৰথম চ'কত থকা খণ্ডৰ ভাৰকেন্দ্ৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(b) (i) Show that the CG of a triangular lamina is the same as that of three particles of equal mass placed at the vertices.

দেখুওৱা যে এটা ত্ৰিভুজাকৃতিৰ ক্ষেত্ৰৰ ভাৰকেন্দ্ৰ আৰু ত্ৰিভুজটোৰ শীৰ্ষবিন্দু তিনিটাত বৰা সমান ভৰৰ তিনিটা বস্তুকণাৰ ভাৰকেন্দ্ৰ একেটাই।

(ii) The weights 1, 5, 3, 4, 2 and 6 kg are placed respectively at the angular points of a regular hexagon in order. Prove that the centre of the hexagon coincides with the centre of gravity of the system.

এটা সুষম ষড়ভুজৰ কৌণিক বিন্দুবোৰত 1, 5, 3, 4, 2 আৰু 6 kg ওজন ক্ৰমিকভাৱে বৰা হৈছে। প্ৰমাণ কৰা যে ষড়ভুজৰ কেন্দ্ৰ আৰু ওজনকেইটাৰ ভাৰকেন্দ্ৰ মিলি যায়।

5. Answer either (a) or (b) :

(a) অথবা (b) ব উত্তৰ কৰা :

(a) (i) Draw a neat diagram of the third system of pulleys. If there are n -pulleys of which the topmost one is fixed and remaining $(n-1)$ are movable, then find the mechanical advantage when the weights of the pulleys are neglected.

তৃতীয় কপিকল প্ৰণালীৰ এটা পৰিস্কাৰ চিত্ৰ আঁকা। যদি প্ৰণালীটোত n -সংখ্যক চকৰী থাকে য'ত উচ্চতম চকৰীটো স্থিৰ আৰু বাকী $(n-1)$ সংখ্যক চকৰী লবচৰ কৰিব পাৰে, তেন্তে চকৰীৰ ওজন অগ্ৰাহ্য কৰিলে, ইয়াৰ যান্ত্ৰিক সুবিধা নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) A first system of pulleys consists of 4 movable pulleys each of weight 8 lb and the string passing round the topmost pulley passes over a fixed pulley. With what force must a man of weight 220 lb pull at the free end of the string in order to balance himself suspended from the lowest pulley?

5

প্রথম প্ৰণালীৰ কপিকল এটাত ৪টা লবচৰ কৰিব পৰা চকৰী আছে আৰু প্ৰতিটো চকৰীৰ ওজন ৪ পাউণ্ড। উচ্চতম চকৰীটোৰ ওপৰেদি যোৱা তাঁৰডাল স্থিৰ চকৰী এটাৰ ওপৰেদি গৈছে। ২২০ পাউণ্ড ওজনৰ মানুহ এজনে তাঁৰডালৰ মুক্ত মূৰত কি বল প্ৰয়োগ কৰিলে নিম্নতম চকৰীৰ পৰা ওলমি থাকিব?

(b) Define machine and mechanical advantage, velocity ratio and efficiency of a machine. In a machine, establish the relation—

Mechanical advantage =

(Velocity ratio × Efficiency)

$$4+6=10$$

যন্ত্ৰ আৰু যন্ত্ৰৰ যান্ত্ৰিক সুবিধা, বেগানুপাত আৰু দক্ষতাৰ সংজ্ঞা দিয়া। এটা যন্ত্ৰৰ ক্ষেত্ৰত—

যান্ত্ৰিক সুবিধা = (বেগানুপাত × দক্ষতা) সম্পৰ্কটো প্ৰতিপন্ন কৰা।

(Continued)

6. Answer either (a) or (b) :

(a) অথবা (b) ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) (i) Obtain the expressions for tangential and normal components of acceleration of a particle moving along a plane curve.

5

সমতলস্থ কোনো বক্ৰৰে গতি কৰা এটা বস্তুকণাৰ স্পৰ্শক আৰু অভিলম্বৰ দিশত ত্বৰণৰ উপাংশ উলিওৱা।

(ii) A particle moves in a straight line with an acceleration $\frac{\mu}{x^3}$ directed towards a fixed point on the line, where μ is a constant and x is the distance from the point. If it starts from rest at a distance a from the point, prove that it will be at a distance $\frac{a^2}{2}$ from the point after a time $\frac{a^2}{2} \sqrt{\frac{3}{\mu}}$.

5

এটা বস্তুকণাই এডাল সবলবেৰখাত, বেৰখাডালৰ ওপৰত থকা এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দু অভিমুখী ত্বৰণ $\frac{\mu}{x^3}$ ৰে গতি কৰে, য'ত μ এটা ধ্ৰুৱক আৰু x বিন্দুটোৰ পৰা দূৰত্ব। যদি বিন্দুটোৰ পৰা a দূৰত্বত বস্তুকণাটোৱে স্থিৰাৱস্থাৰ পৰা গতি কৰে, প্ৰমাণ কৰা যে ই $\frac{a^2}{2} \sqrt{\frac{3}{\mu}}$ সময় পিছত বিন্দুটোৰ পৰা $\frac{a^2}{2}$ দূৰত্বত উপনীত হ'ব।

- (b) (i) A person travels towards east at the rate of 4 km per hour, and observes that the wind seems to blow directly from the north; he then doubles his speed and the wind appears to come from the north-east. Determine the direction and velocity of wind. 5

এজন মানুহ ঘণ্টাত 4 কি.মি. দ্ৰুতিৰে পূবপিনে গৈ আছে আৰু বতাহ পোনে পোনে উত্তৰৰ পৰা অহা যেন পালে। তেওঁ তেতিয়া দ্ৰুতি দুগুণ কৰিলে আৰু বতাহ উত্তৰ-পূব পিনৰ পৰা অহা যেন পালে। বতাহৰ দিশ আৰু বেগ নিৰ্ণয় কৰা।

- (ii) A particle is moving in a parabola with uniform angular velocity about the focus, prove that its normal acceleration at any point is proportional to the radius of curvature of its path at that point. 5

এটা বস্তুকণাই এটা অধিবৃত্তাকাৰ পথত ইয়াৰ নাভি সাপেক্ষে সমকৌণিক বেগত গতি কৰি আছে। প্রমাণ কৰা যে অভিলম্বৰ দিশত ইয়াৰ ত্বৰণ গতিপথৰ সেই বিন্দুত ভাঁজব্যাসাৰ্ধৰ সমানুপাতিক।

7. Answer either (a) or (b) :

(a) অথবা (b) ব উত্তৰ কৰা :

- (a) (i) A shot of mass m penetrates a thickness S of a fixed plate of mass M . Show that if the plate is free to move, the thickness penetrated by the shot is $S / (1 + \frac{m}{M})$. 5

m ভৰৰ গুলী এটাই স্থিৰাৱস্থাত থকা M ভৰৰ তক্তা এখনৰ S দূৰত্ব ভেদ কৰি সোমাই যাব পাৰে। যদি তক্তাখন মুক্তভাৱে লৰচৰ কৰিব পাৰে, তেন্তে দেখুওৱা যে গুলীটোৱে তক্তাখনৰ $S / (1 + \frac{m}{M})$ দূৰত্ব ভেদ কৰিব।

- (ii) A sphere impinges directly on an equal sphere which is at rest. If the coefficient of restitution is e , prove that a fraction $\frac{1}{2}(1 - e^2)$ of the original kinetic energy is lost due to the impact. 5

স্থিৰাৱস্থাত থকা এটা গোলকক আন এটা সমান গোলকে প্রত্যক্ষভাৱে খুন্দিয়ায়। প্রত্যাবর্তন গুণাংক e হ'লে, প্রমাণ কৰা যে মূল গতিশক্তিৰ $\frac{1}{2}(1 - e^2)$ অংশ সংঘৰ্ষৰ ফলত বিনষ্ট হয়।

(14)

- (b) (i) A shell of mass m is projected from a gun of mass M by an explosion which generates a kinetic energy E . Show that the velocity of recoil of the gun is

$$\sqrt{\frac{2mE}{M(M+m)}}$$

5

M ভৰৰ এটা বন্দুকৰ পৰা বিস্ফোৰণৰ দ্বাৰা এটা m ভৰৰ গুলী প্ৰক্ষেপ কৰা হ'ল যাৰ ফলত E গতিশক্তিৰ উত্তৰ হ'ল। দেখুওৱা যে বন্দুকটোৰ ওভোতাই খুন্দিওৱা বেগ

$$\sqrt{\frac{2mE}{M(M+m)}}$$

- (ii) Three balls of masses m_1, m_2, m_3 are in a straight line, the last two being at rest. The first moving in the straight line with velocity u , strikes the second which afterwards strikes the third. Find the velocity of the third ball after impact.

5

(15)

একে সবলবেধাত থকা তিনিটা বলৰ ভৰ m_1, m_2, m_3 আৰু শেষৰ বল দুটা স্থিৰাৱস্থাত আছে। প্ৰথমটোৱে u বেগত সবলবেধাডালেবে গতি কৰি দ্বিতীয়টোক খুন্দিয়ায় আৰু দ্বিতীয়টোৱে তৃতীয়টোক খুন্দিয়ায়। সংঘাতৰ পিছত তৃতীয় বলটোৰ বেগ উলিওৱা।
