2019

MATHEMATICS

(General)

Paper : 5.1

(Statics and Dynamics)

Full Marks : 80

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

Answer either *in English* or *in Assamese*

1. Answer the following questions : 1×10=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) If a system of coplanar forces is in equilibrium, then what is the algebraic sum of the moments of the forces about any point in the plane?

যদি এটা সামতলিক বল প্ৰণালী সাম্য অৱস্থাত থাকে, তেন্তে সমতলৰ যি কোনো বিন্দু সাপেক্ষে বলবোৰৰ ভ্ৰামকৰ বীজগণিতীয় যোগফল কি ?

(b) What is the resultant of a force and a couple?

এটা বল আৰু এটা বলযুগ্মৰ লব্ধ কি?

(c) A system of coplanar forces acting on a rigid body is such that the algebraic sum of their moments about each of any three non-collinear points in their are separately zero. Will the system of forces be in equilibrium?

এটা দৃঢ় পিণ্ডৰ ওপৰত ক্ৰিয়াশীল এটা সামতলিক বল প্ৰণালী এনেকুৱা যে বলবোৰৰ সমতলৰ একে ৰেখাত নথকা যি কোনো তিনিটা বিন্দু সাপেক্ষে সিহঁতৰ বল ভ্ৰামকৰ বীজগণিতীয় সমষ্টি বেলেগে বেলেগে শূন্য। বল প্ৰণালীটো সাম্যাবস্থাত থাকিবনে?

(d) Define limiting friction.

চৰম ঘৰ্ষণৰ সংজ্ঞা লিখা।

(e) What is the position of the centre of gravity of a thin uniform rod?

এটা পাতল সুষম দণ্ডৰ ভাৰকেন্দ্ৰৰ স্থান কি?

(f) Define simple harmonic motion.

সৰল সামঞ্জস্য গতিৰ সংজ্ঞা লিখা।

(g) If the velocities of the particles P and Q be u and v in the directions making angles α and β with the X-axis, write down the relative velocity of P with respect to Q.

P আৰু Q বস্তুকণা দুটাৰ বেগ u আৰু vৰ দিশে X-অক্ষৰ লগত ক্ৰমে α আৰু β কোণ কৰিলে Q সাপেক্ষে Pৰ আপেক্ষিক বেগ লিখা।

(h) A particle is moving in a plane curve. Write down the relation between its angular velocity and linear velocity.

এটা বস্তুকণাই এটা সমতলীয় বক্ৰৰে গতি কৰি আছে। ইয়াৰ কৌণিক বেগ আৰু ৰৈখিক বেগৰ মাজৰ সম্পৰ্কটো লিখা।

(i) Write down the expressions for tangential and normal components of acceleration of a particle moving along a plane curve.

সমতলৰ কোনো বক্ৰৰে গতি কৰা এটা বস্তুকণাৰ স্পৰ্শক আৰু অভিলম্বৰ দিশত ত্বৰণৰ উপাংশৰ ৰাশিমালা লিখা।

(j) If a particle moves under the action of a conservative system of forces, then what is the sum of its KE and PE?

যদি এটা বস্তুকণাই সংৰক্ষণ বল প্ৰণালীৰ প্ৰভাৱত চলাচল কৰে, তেন্তে ইয়াৰ গতিশক্তি আৰু স্থিতিশক্তিৰ যোগফল কি?

2. Answer the following questions : 2×5=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা :

(a) Two men have to carry a stone of weight 77 kg on a light plank. If the stone be placed on the plank at a point dividing it in the ratio 3 : 4, then find the weights which each of the two men has to bear.

দুজন মানুহে এটুকুৰা 77 kg ওজনৰ শিল এখন পাতল তক্তাৰ ওপৰত লৈ কঢ়িয়াব লাগে। শিল টুকুৰা, তক্তাখনক 3 : 4 অনুপাতত বিভক্ত কৰা বিন্দুত ৰাখিলে, প্ৰতিজন মানুহে বহন কৰিবলগীয়া ওজন নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Define coefficient of friction and angle of friction.

ঘৰ্ষণ গুণাংক আৰু ঘৰ্ষণ কোণৰ সংজ্ঞা লিখা।

(c) Prove that the CG of a body is unique.

কোনো এটা পিণ্ডৰ ভাৰকেন্দ্ৰ অদ্বিতীয় বুলি প্ৰমাণ কৰা।

(d) A particle moves along a straight line. The law of motion being $x = A\cos(nt+k)$, where x is the position of the particle at any time t. Show that the acceleration is directed to the origin and varies as the distance.

এটা বস্তুকণাই $x = A\cos(nt+k)$ নিয়মানুসৰি সৰলৰেখাত গতি কৰে, য'ত x হ'ল t সময়ত বস্তুকণাটোৰ অৱস্থান। দেখুওৱা যে বস্তুকণাটোৰ ত্বৰণ সদায় মূলবিন্দু অভিমুখী আৰু মূলবিন্দুৰ পৰা ইয়াৰ দূৰত্বৰ সমানুপাতিক।

(e) A motorcar weighing 10 quintals and travelling at 12 metres/sec is brought to rest in 18 metres by the application of its brakes. Find the work done by the force of resistance due to brakes.

12 মিটাৰ/চেঃ বেগত গৈ থকা 10 কুইন্টল ওজনৰ মটৰ গাড়ী এখনক ব্ৰেকৰ সহায়ত 18 মিটাৰ দূৰত ৰখাই দিয়া হৈছে। ব্ৰেকৰ প্ৰতিৰোধী বলৰ দ্বাৰা কৰা কাৰ্য নিৰ্ণয় কৰা।

3. Answer the following questions : 5×4=20

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) State and prove the necessary and sufficient conditions for the equilibrium of a system of coplanar forces acting on a rigid body.

এটা দৃঢ় পিণ্ডৰ ওপৰত ক্ৰিয়াশীল এটা সামতলিক বল প্ৰণালীৰ সাম্যাৱস্থাৰ প্ৰয়োজনীয় আৰু পৰ্যাপ্ত চৰ্তসমূহ লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

Or / অথবা

A uniform beam of length $2a$ rests in equilibrium against a smooth vertical wall and over a smooth peg at a distance h from the wall. If θ be the inclination of the beam to the vertical wall, show that $\sin^3\theta = \frac{h}{a}$.

2a দৈৰ্ঘ্যৰ সুষম দণ্ড এডালৰ এটা মূৰ মসৃণ উলম্ব দেৱাল এখনৰ গাত লাগি আছে, আনহাতে দণ্ডডাল এটা মসৃণ খুঁটিৰ মূৰত আউজি আছে। খুঁটি আৰু উলম্ব দেৱালখনৰ দূৰত্ব h আৰু দণ্ডডালে উলম্ব দেৱালৰ লগত θ কোণ কৰি থাকিলে, দেখুওৱা যে $\sin^3\theta = \frac{h}{a}$.

(b) A uniform ladder is in equilibrium with one end resting on the ground and the other against a vertical wall. If the ground and the wall be both rough, the coefficient of friction being μ and μ′ respectively and if the ladder be on the point of slipping at both ends, then prove that the inclination of the ladder to the horizon is given by θ, where

$$\tan\theta = \left(\frac{1-\mu\mu'}{2\mu}\right)$$

এটা সুষম জখলাৰ এটা মূৰ মাটিত আৰু আনটো মূৰ এখন উলম্ব বেৰত আউজি আছে। যদি মাটি আৰু বেৰ উভয়েই খহটা হয় আৰু সিহঁতৰ ঘৰ্ষণ গুণাংক ক্ৰমে μ আৰু μ′ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে ঠিক যি মুহূৰ্তত দুই মূৰ পিছলে তেতিয়া অনুভূমিকৰ লগত জখলাৰ উত্থান কোণ θ, য'ত

$$\tan\theta = \left(\frac{1-\mu\mu'}{2\mu}\right)$$

Or / অথবা

Show that in a simple harmonic motion of amplitude a and period T, the velocity V at a distance x from the centre is given by the relation $V^2T^2 = 4\pi^2(a^2 - x^2)$.

দেখুওৱা যে এটা সৰল সামঞ্জস্য গতিৰ T পৰ্যায়কাল, a বিস্তাৰ আৰু কেন্দ্ৰৰ পৰা x দূৰত্বত ইয়াৰ বেগ V হ'লে ইহঁতৰ মাজৰ সম্পৰ্ক হ'ব $V^2T^2 = 4\pi^2(a^2 - x^2)$.

(c) A particle is projected in a direction making an angle θ with the horizon. If it passes through the points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) referred to horizontal and vertical axes through the point of projection, then prove that

$$\tan\theta = (x_2^2y_1 - x_1^2y_2)/x_1x_2(x_2 - x_1)$$

অনুভূমিকৰ লগত পৰস্পৰ θ কোণত এটা কণিকা প্ৰক্ষেপ কৰা হ'ল। প্ৰক্ষেপ বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা অনুভূমিক আৰু উলম্ব অক্ষ সাপেক্ষে (x_1, y_1) আৰু (x_2, y_2) বিন্দু দুটাৰ মাজেৰে যদি কণিকাটোৱে গতি কৰে, প্ৰমাণ কৰা যে

$$\tan\theta = (x_2^2y_1 - x_1^2y_2)/x_1x_2(x_2 - x_1)$$

(d) If R is the range of a projectile on a horizontal plane and h is the maximum height for a given angle of projection, then show that the maximum range with the same velocity of projection is

$$2h + \frac{R^2}{8h}$$

এটা প্ৰক্ষেপ্যৰ অনুভূমিক পৰিসৰ R আৰু কোনো প্ৰদত্ত প্ৰক্ষেপ্য কোণৰ বাবে সৰ্বোচ্চ উচ্চতা h হ'লে, দেখুওৱা যে সেই একে প্ৰক্ষেপ্য কোণৰ বাবে সৰ্বোচ্চ পৰিসৰ হ'ব

$$2h + \frac{R^2}{8h}$$

4. Answer either *(a)* or *(b)* :

(a) অথবা *(b)* ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) *(i)* A particle starts with a velocity u and moves under a retardation μ times the distance described. Find the distance traversed before it comes to rest. 5

এটা বস্তুকণাই অতিক্ৰম কৰা দূৰত্বৰ μ গুণ মন্থৰণৰ অধীনত u বেগেৰে গতি আৰম্ভ কৰে। স্থিৰ অৱস্থাত অহাৰ পূৰ্বত বস্তুকণাটো কিমান দূৰত্ব অতিক্ৰম কৰিব, নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) Define impulse of a force. If an impulse I changes the velocity of a particle of mass m from V_1 to V_2, prove that the gain is

$$\frac{1}{2}I(V_1 + V_2)$$ 5

তাৎক্ষণিক বলৰ সংজ্ঞা দিয়া। যদি তাৎক্ষণিক বল Iএ m ভৰবিশিষ্ট বস্তু এটাৰ বেগ V_1ৰ পৰা V_2 লৈ পৰিৱৰ্তন কৰে, প্ৰমাণ কৰা যে গতিশক্তিৰ পৰিমাণ হ'ব

$$\frac{1}{2}I(V_1 + V_2)$$

(b) *(i)* Weights proportional to 5 lb, 4 lb, 6 lb, 2 lb, 7 lb and 3 lb are placed at the angular points of regular hexagon taken in order. Show that their CG is the centre of the hexagon. 5

এটা সুষম ষড়ভূজৰ কৌণিক বিন্দুবোৰত 5 lb, 4 lb, 6 lb, 2 lb, 7 lb আৰু 3 lb ওজনৰ সমানুপাতিক ওজন ক্ৰমিকভাৱে ৰখা হৈছে। প্ৰমাণ কৰা যে ষড়ভূজৰ কেন্দ্ৰ আৰু ওজনকেইটাৰ ভাৰকেন্দ্ৰ মিলি যায়।

(ii) A uniform wire is bent in the form of a triangle with sides a, b, c. Prove that the distances of the centre of gravity of the whole from sides are as

$$\frac{b+c}{a} : \frac{c+a}{b} : \frac{a+b}{c}$$ 5

যদি এডাল মুক্ত তাৰ বেঁকাকৰি a, b, c বাহুৰ এটা ত্ৰিভুজ বনাব পাৰি, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে কেন্দ্ৰবিন্দুৰ পৰা ত্ৰিভুজৰ বাহুৰ দূৰত্বৰ অনুপাত

$$\frac{b+c}{a} : \frac{c+a}{b} : \frac{a+b}{c}$$

5. Answer either *(a)* or *(b)* :

(a) অথবা *(b)* ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Draw a neat diagram of the first system of pulleys. Find its mechanical advantage when—

(i) the weights of the pulleys are neglected;

(ii) the weights of the pulleys are not neglected. 2+4+4=10

প্ৰথম প্ৰণালীৰ কপিকল এটাৰ পৰিষ্কাৰ চিত্ৰ আঁকা। ইয়াৰ যান্ত্ৰিক সুবিধা উলিওৱা যেতিয়া—

(i) চকৰিৰ ওজন অগ্ৰাহ্য কৰা হয়;

(ii) চকৰিৰ ওজন অগ্ৰাহ্য কৰা নহয়।

(b) (i) A first system of pulleys consists of 4 movable pulleys each of weight 8 lb and the string passing round the topmost pulley passes over a fixed pulley. With what force must a man of weight 220 lb pull at the free-end of the string in order to balance himself suspended from the lowest pulley? 5

প্ৰথম প্ৰণালীৰ কপিকল এটাত 4টা লৰচৰ কৰিব পৰা চকৰী আছে আৰু প্ৰতিটো চকৰীৰ ওজন 8 পাউণ্ড। উচ্চতম চকৰীটোৰ ওপৰেদি যোৱা তাঁৰডাল স্থিৰ চকৰী এটাৰ ওপৰেদি গৈছে। 220 পাউণ্ড ওজনৰ মানুহ এজনে তাঁৰডালৰ মুক্ত মূৰত কি বল প্ৰয়োগ কৰিলে নিম্নতম চকৰীৰ পৰা ওলমি থাকিব?

(ii) In the second system of pulleys, it is found that a weight of w lbs supports a weight W lbs and a weight w' lbs supports a weight of W' lbs. Find the number of pulleys in the two blocks and the weight of the lower block. 5

দ্বিতীয় প্ৰণালীৰ কপিকল এটাত দেখা যায় যে w lbs ওজনৰ বল প্ৰয়োগ কৰি W lbs ওজন আৰু w' lbs ওজনৰ বল প্ৰয়োগ কৰি W' lbs ওজন দাঙিব পাৰি। দুয়োটা ব্ল'কত থকা চকৰিৰ সংখ্যা আৰু তলৰ ব্ল'কৰ ওজন নিৰ্ণয় কৰা।

6. Answer either *(a)* or *(b)* :

(a) অথবা *(b)*ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) (i) Find the radial and cross-radial acceleration of a particle moving in a curve. 5

সমতলস্থ কোনো বক্ৰেৰে গতি কৰা এটা বস্তুকণাৰ অৰীয় (radial) আৰু তিৰ্যক (cross-radial) ত্বৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) A particle of mass m is acted on by a force $m\mu(x+a^4/x^3)$ towards the origin. If it starts from rest at a distance a, then show that it will arrive at the origin in time $\pi/4\sqrt{\mu}$. 5

m ভৰৰ বস্তুকণা এটাৰ ওপৰত মূল বিন্দুৰ দিশত $m\mu(x+a^4/x^3)$ বলে ক্ৰিয়া কৰি আছে। যদি a দূৰত্বত বস্তুকণাটোৱে স্থিৰাৱস্থাৰ পৰা গতি কৰে, তেন্তে দেখুওৱা যে ই $\pi/4\sqrt{\mu}$ সময়ত মূল বিন্দু পাবহি।

(b) (i) To a cyclist travelling at the rate of 8 km per hour due East, the wind appears to come from the North-East; but when he travels due North-East at the same speed, it appears to come from the North. Find the direction and the velocity of the wind. 5

৪ কি.মি. বেগেৰে পূৱ ফালে গৈ থকা চাইকেল আৰোহী এজনৰ বাবে উত্তৰ-পূৱ ফালৰ পৰা বতাহ বলি থকা যেন লাগিছে; কিন্তু তেওঁ যেতিয়া একে বেগেৰে উত্তৰ-পূৱ ফালে যাত্ৰা কৰে, তেতিয়া বতাহ উত্তৰ ফালৰ পৰা বলি থকা যেন লাগে। বতাহৰ বেগ আৰু দিশ নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) A particle is moving in a parabola with uniform angular velocity about the focus. Prove that its normal acceleration at any point is proportional to the radius of curvature of its path at that point. 5

এটা বস্তুকণাই এটা অধিবৃত্তাকাৰ পথত নাভি সাপেক্ষে সমকৌণিক বেগত গতি কৰি আছে। প্ৰমাণ কৰা যে যি কোনো বিন্দুত অভিলম্বৰ দিশত ইয়াৰ ত্বৰণ গতিপথ সেই বিন্দুত ভাঁজ ব্যাসাৰ্ধৰ সমানুপাতিক।

7. Answer either (a) or (b) :

(a) অথবা (b)ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) (i) A shell of mass m is projected from a gun of mass M by an explosion which generates a kinetic energy E. Show that the velocity of recoil of the gun is

$$\sqrt{\frac{2mE}{M(M+m)}}$$ 5

M ভৰৰ এটা বন্দুকৰ পৰা বিস্ফোৰণৰ দ্বাৰা এটা m ভৰৰ গুলী প্ৰক্ষেপ কৰা হ'ল যাৰ ফলত E গতিশক্তিৰ উদ্ভৱ হ'ল। দেখুওৱা যে বন্দুকটোৰ ওভোতাই খুন্দিওৱা বেগ

$$\sqrt{\frac{2mE}{M(M+m)}}$$

(ii) Let two smooth spheres of masses m_1 and m_2 moving with velocities u_1 and u_2 along their line of centres come into direct collision and V_1 and V_2 be their velocities immediately after the impact. If e be the coefficient of restitution between the spheres, show that the loss of kinetic energy is

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right)(1-e^2)(u_1-u_2)^2$$ 5

m_1 আৰু m_2 ভৰৰ দুটা নিমজ গোলক u_1 আৰু u_2 বেগেৰে গতি কৰি সিহঁতৰ গতিপথত এটাই আনটোক খুন্দিয়ায়। খুন্দিওৱাৰ পিছত সিহঁতৰ বেগ ক্ৰমে V_1 আৰু V_2, আৰু সিহঁতৰ মাজৰ প্ৰত্যাৱৰ্তন গুণাংক e হ'লে প্ৰমাণ কৰা যে গতিশক্তিৰ হ্ৰাসৰ পৰিমাণ হ'ব

$$\frac{1}{2}\left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right)(1-e^2)(u_1-u_2)^2$$

(b) (i) A sphere impinges directly on an equal sphere at rest. If the coefficient of restitution be e, then show that their velocities after impact are $(1-e)$, $(1+e)$. 5

স্থিৰ অৱস্থাত থকা এটা গোলকক আন এটা সমান গোলকে প্ৰত্যক্ষভাৱে খুন্দিয়ায়। যদিহে প্ৰত্যাৱৰ্তন গুণাংক e হয়, তেতিয়া দেখুওৱা যে সংঘাতৰ পিছত সিহঁতৰ বেগ $(1-e)$, $(1+e)$.

(ii) Three balls of masses m_1, m_2, m_3 respectively are in straight line, the last two being at rest; the first, moving in the straight line with velocity u, strikes the second which afterwards strikes the third. Show that the velocity of the third ball after impact is

$$\frac{m_1 m_2 (1+e)^2}{(m_3+m_2)(m_1+m_2)}$$ 5

m_1, m_2, m_3 ভৰৰ তিনিটা বল এডাল সৰলৰেখাত আছে, য'ত শেষৰ দুটা বল স্থিৰাৱস্থাত আছে; প্ৰথম বলটো u বেগেৰে গতি কৰি দ্বিতীয় বলক খুন্দিয়ায় আৰু তাৰ পাছত দ্বিতীয় বলটোৱে তৃতীয়টোক খুন্দিয়ায়। দেখুওৱা যে খুন্দা খোৱাৰ পাছত তৃতীয় বলটোৰ বেগ হ'ব

$$\frac{m_1 m_2 (1+e)^2}{(m_3+m_2)(m_1+m_2)}$$

★★★