3 (Sem–2/CBCS) MAT HG 1/2, RC

2022

MATHEMATICS

(Honours Generic/Regular)

For Honours Generic
Answer the Questions from any one Option.

OPTION – A

(Algebra)

Paper : MAT–HG–2016/MAT–RC–2016

Full Marks : 80

Time : Three hours

OPTION – B

(Discrete Mathematics)

Paper : MAT–HG–2026

Full Marks : 80

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

*Answer **either** in English **or** in Assamese.*

OPTION – A

(*Algebra*)

Paper : MAT–HG–2016/MAT–RC–2016

1. Answer ***any ten*** questions : 1×10=10

   যিকোনো দহটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ লিখা ঃ

   (a) If sum of two roots of the equation $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ is zero, then

   যদি সমীকৰণ $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ ৰ দুটা মূলৰ যোগফল শূন্য হয়, তেন্তে

   (i) $pq - r = 0$

   (ii) $pr - q = 0$

   (iii) $qr - p = 0$

   (iv) $pr + q = 0$

   (b) If α, β, γ are the roots of the equation $2x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$, then the value of $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$ is

   α, β, γ সমীকৰণ $2x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$ ৰ মূল হ'লে, $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$ ৰ মান হ'ব

   (i) 7

   (ii) –5

   (iii) 6

   (iv) 20

   (c) If the product of two roots of the equation $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = 0$ is 3, then the product of other two roots is

   $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = 0$ সমীকৰণটোৰ দুটা মূলৰ পূৰণ ফল 3 হ'লে, আনদুটা মূলৰ পূৰণ ফল হ'ব

   (i) 4

   (ii) –4

   (iii) 3

   (iv) –3

   (d) The square roots of $-2i$ are

   $-2i$ ৰ বৰ্গমূল বেৰ হ'ল

   (i) $\pm(1-i)$

   (ii) $\pm(1+i)$

   (iii) $\pm(i-1)$

   (iv) $\pm(-1-i)$

   (e) Construct an example of a 3×3 matrix which is both symmetric and skew symmetric.

   এটা 3×3 মৌলকক্ষ গঠন কৰা যিটো উভয়ে সমমিত আৰু বিষম সমমিত।

(f) If A and B are matrices, then rank of the matrix $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ is

যদি A আৰু B দুটা মৌলকক্ষ হয়, তেন্তে $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ মৌলকক্ষটোৰ কোটি হ'ব

(i) rank (A) + rank (B)

(ii) rank (A) − rank (B)

(iii) rank (A) . rank (B)

(iv) rank (A)/rank (B)

(g) A homogeneous system of m linear equations in n unknown possesses the trivial solution if the rank of the coefficient matrix is

m ৰৈখিক সমীকৰণ আৰু n অজ্ঞাত ৰাশি থকা এটা সমমাত্ৰ প্ৰণালীৰ নিৰৰ্থক সমাধান থাকে যদি সহগ মৌলকক্ষটোৰ কোটি হয়

(i) m

(ii) n

(iii) $m+n$

(iv) $m-n$

(h) A and B are equivalent matrices if and only if

A আৰু B দুটা সমতুল্য মৌলকক্ষ যদি আৰু যদিহে

(i) $PAQ=B$ for non-singular matrices A and B

অক্ষীয়মান মৌলকক্ষ A আৰু Bৰ বাবে $PAQ=B$

(ii) $PA=B$, for a non-singular matrix P

অক্ষীয়মান মৌলকক্ষ Pৰ বাবে $PA=B$

(iii) $AQ=B$ for a non-singular matrix Q

অক্ষীয়মান মৌলকক্ষ Q ৰ বাবে $AQ=B$

(iv) $PB=A$ for a non-singular matrix P

অক্ষীয়মান মৌলকক্ষ Pৰ বাবে $PB=A$

(i) What is the identity element of the group $(G, *)$ where $G=\mathbb{R}-\{-1\}$ and $a*b=a+b+ab$, for all $a, b \in G$?

সংঘ $(G, *)$ ৰ একক মৌলটো কি হ'ব য'ত $G=\mathbb{R}-\{-1\}$ আৰু সকলোবোৰ $a, b \in G$ ৰ বাবে $a*b=a+b+ab$?

(j) Construct a multiplication table for Z_3.

Z_3 ৰ বাবে পূৰণৰ টেবুল এখন গঠন কৰা।

(k) What is the order of the following permutation?

তলৰ বিন্যাসটোৰ মাত্ৰা কিমান ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 2 & 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(l) If (যদি) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

find (নিৰ্ণয় কৰা) σ^{-1}

(m) Let G be a group and $a, b \in G$ be any two elements. Then

ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু $a, b \in G$ যিকোনো দুটা মৌল। তেন্তে

(i) $0\left(aba^{-1}\right) = 0\,(a)$

(ii) $0\left(aba^{-1}\right) = 0\left(a^{-1}\right)$

(iii) $0\left(aba^{-1}\right) = 0\,(b)$

(iv) None of the above

(n) Write the units of the ring of integers Z.

অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয় Z ৰ প্ৰতিলোমীয় বোৰ লিখা।

(o) What are the eigenvalues of the following matrix?

তলৰ মৌলকক্ষটোৰ আইগেনমান বোৰ কি হ'ব ?

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Answer ***any five*** questions : $2 \times 5 = 10$

যিকোনো পাচোটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) Determine x, y, z, if

x, y, z নিৰ্ণয় কৰা, যদি

$$2\begin{pmatrix} x+2 & y+3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ y & z \end{pmatrix}^T$$

(b) Is the following system consistent? Determine it.

তলৰ প্ৰণালীটো সুসংহত হয়নে ? নিৰ্ণয় কৰা।

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2x + 4y &= 2 \\ 3x + 6y + z &= 4 \end{aligned}$$

(c) Show that $0 \in \sigma(A)$ if and only if A is a singular matrix.

দেখুওৱা যে $0 \in \sigma(A)$ যদি আৰু যদিহে A এটা অপ্রতিম মৌলকক্ষ।

(d) Find the value of $\sum \alpha^2 \beta$ if α, β, γ are the roots of the cubic equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$

ত্রিঘাত সমীকৰণ $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ ৰ মূল কেইটা α, β, γ হ'লে $\sum \alpha^2 \beta$ ৰ মান নির্ণয় কৰা।

(e) Evaluate (মান উলিওৱা) ঃ

$$\left(\sqrt{3} + i\right)^{11}$$

(f) Let G be a group. Prove that if $x^2 = e$ for all $x \in G$, then G is an Abelian group.

ধৰা হ'ল G এটা সংঘ। যদি $x^2 = e$ সকলোবোৰ $x \in G$ ৰ বাবে, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে G এটা এবেলীয় সংঘ।

(g) Define a cyclic group and give *one* example.

চক্রীয় সংঘৰ সংজ্ঞা লিখা আৰু *এটা* উদাহৰণ দিয়া।

(h) Prove that any group of prime order is cyclic.

প্রমাণ কৰা যে মৌলিক মাত্রাৰ যিকোনো সংঘ চক্রীয়।

3. Answer ***any four*** questions : 5×4=20

যিকোনো চাৰিটা প্রশ্নৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) Solve the equation

$x^3 - 5x^2 - 16x + 80 = 0$ if the sum of two of its roots is zero.

$x^3 - 5x^2 - 16x + 80 = 0$ সমীকৰণটোৰ দুটা মূলৰ যোগফল শূন্য হ'লে, সমীকৰণটো সমাধান কৰা।

(b) Solve the following quadratic equation :

তলৰ দ্বিঘাত সমীকৰণটো সমাধান কৰা ঃ

$iz^2 - 2(1+i)z + 1 = 0$ for $z \in \mathbb{C}$

(c) Find the inverse of the following matrix by Gauss-Jordan elimination method :

গাউছ্-জৰ্ডান অপনয়ন পদ্ধতিৰ দ্বাৰা তলৰ মৌলকক্ষটোৰ বিপৰীত মৌলকক্ষ নির্ণয় কৰা ঃ

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 5 \\ 4 & -7 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

(d) Determine the reduced row echelon form of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

and express each nonbasic column in terms of the basic columns. 3+2=5

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ মৌলকক্ষটোৰ লঘুকৃত শাৰী এচেলন ৰূপ নিৰ্ণয় কৰা আৰু প্ৰতিটো অমূল স্তম্ভক মূল স্তম্ভবোৰৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰা।

(e) Determine the general solution of the following non-homogeneous system of equations :

তলৰ অসমাংগ সমীকৰণ প্ৰণালীটোৰ সাধাৰণ সমাধান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 1$$
$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 1$$
$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 2$$
$$3x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 3$$

(f) Find the eigenvalues, spectrum and eigenvectors of $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ৰ আইগেনমান, স্পেকট্ৰাম আৰু আইগেনভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(g) (i) Prove that if G is a group and $a, b \in G$, then the equation $ax = b$ has a unique solution. 3

যদি G এটা সংঘ আৰু $a, b \in G$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $ax = b$ সমীকৰণটোৰ এটা অদ্বিতীয় সমাধান পোৱা যায়।

(ii) In a group G, show that $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, for all $a, b \in G$. 2

দেখুওৱা যে সংঘ Gত $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, সকলোবোৰ $a, b \in G$ ৰ বাবে।

(h) Define order of an element of a group. Let a be an element of a group G. If a has finite order and $k \in Z$, prove that $a^k = e$ if and only if $0(a)|k$.

1+4=5

এটা সংঘৰ মৌল এটাৰ মাত্ৰাৰ সংজ্ঞা লিখা। ধৰা হ'ল G সংঘটোৰ a যিকোনো এটা মৌল। যদি a ৰ মাত্ৰা সীমিত আৰু $k \in Z$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $a^k = e$ যদি আৰু যদিহে $0(a)|k$.

4. Answer ***any four*** questions : 10×4=40

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) *(i)* State and prove De Moivre's theorem for integral index.

1+5=6

ডি মইভাৰৰ উপপাদ্যটো অখণ্ড সূচকৰ বাবে লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

(ii) Show that 4

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$
$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

দেখুওৱা যে

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$
$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

(b) *(i)* Solve the equation

$$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$$

whose roots are in arithmetic progression. 5

$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ সমীকৰণটো সমাধান কৰা যাৰ মূলসমূহ সমান্তৰ প্ৰগতিত আছে।

(ii) Find the condition that the equation $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ should have its roots in geometric progression.

5

$x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকৰণটোৰ মূলসমূহ গুণোত্তৰ প্ৰগতিত থকাৰ চৰ্তটো নিৰ্ণয় কৰা।

(c) *(i)* Find the value of

$$(\beta+\gamma-\alpha)^2 + (\gamma+\alpha-\beta)^2 + (\alpha+\beta-\gamma)^2$$

if α, β, γ are the roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

5

α, β, γ সমীকৰণ $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ৰ মূল হ'লে,

$(\beta+\gamma-\alpha)^2 + (\gamma+\alpha-\beta)^2 + (\alpha+\beta-\gamma)^2$ ৰ মান উলিওৱা।

Contd.

(ii) Solve the equation 5

$x^3 - 9x^2 + 14x + 24 = 0$, two of whose roots are in the ratio 3 : 2.

$x^3 - 9x^2 + 14x + 24 = 0$ সমীকৰণটো সমাধান কৰা যাৰ দুটা মূল 3 : 2 অনুপাতত থাকে।

(d) (i) Find the value of

$(\alpha^2+2)(\beta^2+2)(\gamma^2+2)(\delta^2+2)$

where $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are the roots of the equation

$x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 5x + 10 = 0$. 5

$(\alpha^2+2)(\beta^2+2)(\gamma^2+2)(\delta^2+2)$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা য'ত $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ সমীকৰণ

$x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 5x + 10 = 0$ ৰ মূল।

(ii) If the equation

$x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 6x - 21 = 0$ has two roots equal in magnitude and opposite in sign, then find all the roots of the equation. 5

সমীকৰণ $x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 6x - 21 = 0$ ৰ দুটা মূল সমমানৰ কিন্তু বিপৰীত চিনযুক্ত হ'লে সমীকৰণটোৰ সমূহ মূল নিৰ্ণয় কৰা।

(e) (i) Explain why the following homogeneous system has infinitely many solutions, and find the general solution : 5

তলৰ সমমাত্ৰ প্ৰণালীটোৰ কিয় অসীম সংখ্যক সমাধান পোৱা যায় ব্যাখ্যা কৰা, আৰু সাধাৰণ সমাধান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$$

$$2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0$$

$$3x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 0$$

(ii) If A is a $m \times n$ matrix such that rank $(A) = r$, then prove that

$$A \sim N_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 5

যদি A এটা $m \times n$ মৌলকক্ষ যাৰ কোটি r,

প্ৰমাণ কৰা যে $A \sim N_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(f) (i) Determine the rank and identify the basic columns in the matrix

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 2 & 2\\ 3 & 6 & 3 & 4\end{pmatrix}$$ 5

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 2 & 2\\ 3 & 6 & 3 & 4\end{pmatrix}$$ মৌলকক্ষটোৰ

কোটি নিৰ্ণয় কৰা আৰু মূল স্তম্ভবোৰ চিনাক্ত কৰা।

(ii) Prove that a square matrix can be expressed uniquely as the sum of a symmetric matrix and a skew-symmetric matrix. 5

প্ৰমাণ কৰা যে এটা বৰ্গ মৌলকক্ষক অদ্বিতীয়ভাবে এটা সমমিত আৰু বিষম সমমিত মৌলকক্ষৰ যোগফল হিচাবে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

(g) (i) If (λ, x) is an eigenpair for a nonsingular matrix A, show that (λ^{-1}, x) is an eigenpair for A^{-1}. 4

যদি এটা অক্ষীয়মান মৌলকক্ষ A ৰ বাবে (λ, x) এটা আইগেনযোৰা হয়, দেখুওৱা যে A^{-1} ৰ বাবে (λ^{-1}, x) এটা আইগেনযোৰা হ'ব।

(ii) Let A be a square matrix. For all $\alpha \notin \sigma(A)$, prove that x is an eigenvector of A if and only if x is an eigenvector of $(A-\alpha I)^{-1}$. 6

ধৰা হ'ল A এটা বৰ্গ মৌলকক্ষ। সকলোবোৰ $\alpha \notin \sigma(A)$ ৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা যে x, A ৰ এটা আইগেনভেক্টৰ যদি আৰু যদিহে x, $(A-\alpha I)^{-1}$ ৰ এটা আইগেনভেক্টৰ।

(h) (i) If H is a subgroup of a finite group G, then prove that the order of H is a divisor of the order of G. 6

যদি H, এটা সীমিত সংঘ G ৰ উপসংঘ, তেনেহ'লে প্ৰমাণ কৰা যে H ৰ মাত্ৰা G ৰ মাত্ৰাৰ এটা ভাজক।

(ii) Let G be a group and $a \in G$. Show that $\langle a \rangle$ is a subgroup of G. 4

ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু $a \in G$. দেখুওৱা যে $\langle a \rangle$, G ৰ এটা উপসংঘ।

(i) (A) Let G be a group, and H and K be subgroups of G. If $h^{-1}kh \in K$ for all $h \in H$ and $k \in K$, prove that HK is a subgroup of G. 5

ধৰা হ'ল G এটা সংঘ, আৰু H আৰু K ইয়াৰ উপসংঘ। যদি সকলোবোৰ $h \in H$ আৰু $k \in K$ ৰবাবে $h^{-1}kh \in K$ তেনেহ'লে প্ৰমাণ কৰা যে HK, G-ৰ এটা উপসংঘ।

(B) Prove that the intersection of any collection of subgroups of a group is a subgroup of the group. 5

প্ৰমাণ কৰা যে এটা সংঘৰ যিকোনো সংখ্যক উপসংঘৰ ছেদন সংঘটোৰ এটা উপসংঘ।

(j) (i) Let S be a commutative ring and R be a subset of S. Prove that R is a subring of S if and only if 6

ধৰা হ'ল S এটা ক্ৰমবিনিমেয় বলয় আৰু R, S ৰ এটা উপসংহতি। প্ৰমাণ কৰা যে R, Sৰ এটা উপবলয় যদি আৰু যদিহে

(1) R is closed under addition and multiplication

যোগ আৰু পূৰণ প্ৰক্ৰিয়া সাপেক্ষে R আৱদ্ধ

(2) if $a \in R$, then $-a \in R$,

যদি $a \in R$ তেনেহ'লে $-a \in R$,

(3) R contains the identity element

Rত S ৰ একক মৌলটো থাকে।

(ii) Prove that in a commutative ring R, the set R^X of units of R is an Abelian group under the multiplication of R. 4

প্ৰমাণ কৰা যে এটা ক্ৰমবিনিমেয় বলয় Rত প্ৰতিলোমীয় বোৰৰ সংহতি R^X য়ে Rৰ পূৰণ প্ৰক্ৰিয়া সাপেক্ষে এটা এবেলীয় সংঘ গঠন কৰে।

OPTION – B

(Discrete Mathematics)

Paper : MAT–HG–2026

1. Answer ***any ten*** questions : 1×10=10

যিকোনো দহটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Let $(N, \leq)$ be a partially ordered set, where $a \leq b \Leftrightarrow a \mid b$. Give an example of an antichain, which is a subset of N, and is induced by the same relation.

ধৰা হ'ল $(N, \leq)$ এটা আংশিকভাৱে ক্ৰমিত সংহতি, য'ত $a \leq b \Leftrightarrow a \mid b$. এটা 'এন্টিচেইন'-ৰ উদাহৰণ দিয়া, যিটো N-ৰ এটা উপসংহতি, আৰু একে সম্পৰ্কৰ দ্বাৰা প্ৰৰোচিত হয়।

(b) Let $P = Q = \{0, 1\}$ be two posets, with the usual '$\leq$' relation. Let $\phi : P \to Q$, such that $\phi(0) = 1, \phi(1) = 0$. Is ϕ an order-isomorphism?

ধৰা হ'ল $P = Q = \{0, 1\}$ সাধাৰণ '$\leq$' সম্পৰ্কৰ সৈতে দুটা আংশিকভাৱে ক্ৰমিত সংহতি, $\phi : P \to Q$ লোৱা য'ত $\phi(0) = 1, \phi(1) = 0$. ϕ এটা ক্ৰম-একৈকী সমকাৰিক নেকি ?

(c) Let $A = \{4, 5, 6, 7\}$, and let

$$R = \{(4,4), (5,5), (6,6), (7,7), (4,5), (4,6), (4,7), (5,6), (5,7), (6,7)\}$$

be the relation such that (A, R) is a partially ordered set. Write the dual of (A, R).

ধৰা হ'ল $A = \{4, 5, 6, 7\}$ আৰু

$$R = \{(4,4), (5,5), (6,6), (7,7), (4,5), (4,6), (4,7), (5,6), (5,7), (6,7)\}$$

এনে এটা সম্পৰ্ক যে (A, R) এটা আংশিকভাৱে ক্ৰমিত সংহতি হয়। (A, R) -ৰ দ্বৈত লিখা।

(d) Let X be a non-empty set, and $(\wp(X), \subseteq)$ be a poset. Is it a chain?

ধৰা হ'ল X এটা সংহতি যিটো ৰিক্ত নহয়, আৰু $(\wp(X), \subseteq)$ এটা আংশিকভাৱে ক্ৰমিত সংহতি। ই এটা শৃংখল নেকি ?

(e) Let $(P, \leq)$ be a poset. When can P become a lattice?

ধৰা হ'ল $(P, \leq)$ এটা আংশিকভাৱে ক্ৰমিত সংহতি। P কেতিয়া জালী হ'ব পাৰে ?

(f) Let $D=\{1,2,5,10\}$. Let '|' (divides) be the partial ordering on *D*. Evaluate $2 \vee 5$.

ধৰা হ'ল $D=\{1,2,5,10\}$। ধৰা হ'ল '|' (হৰণ কৰে) *D*-ৰ ওপৰত এটা আংশিক ক্ৰম সম্পৰ্ক। $2 \vee 5$ মূল্যায়ন কৰা।

(g) Is $\mathbb{R}$ a complete lattice with the usual partial order relation '$\leq$'?

$\mathbb{R}$ সাধাৰণ আংশিক ক্ৰম সম্পৰ্কৰ সৈতে এটা পূৰ্ণ জালী নেকি ?

(h) Let *L* be a lattice and $a \in L$. Is $\{a\}$ a sublattice?

ধৰা হ'ল *L* এটা জালী আৰু $a \in L$। $\{a\}$ এটা উপজালী নেকি ?

(i) Define lattice homomorphism.

জালী অনুৰূপতাৰ সংজ্ঞা লিখা।

(j) When is a lattice said to be bounded?

জালী এটাক কেতিয়া পৰিবদ্ধ বুলি কোৱা হয় ?

(k) Define complemented lattice.

পূৰকযুক্ত জালীৰ সংজ্ঞা লিখা।

(l) Define Boolean polynomials.

বুলীয় বহুপদ-ৰ সংজ্ঞা লিখা।

(m) Is the complement of an element in Boolean algebra unique?

বুলীয় বীজগণিতত এটা মৌলৰ পূৰক অনন্য নেকি ?

(n) Let *M* be a non-empty set. What are the '0' and '1' elements of the Boolean algebra $\mathcal{P}(M)$ equipped with the usual operations '$\cap$' and '$\cup$'?

ধৰা হ'ল *M* এটা সংহতি যিটো ৰিক্ত নহয়। '$\cap$' আৰু '$\cup$' সাধাৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰে সজ্জিত বুলীয় বীজগণিত $\mathcal{P}(M)$-ৰ '0' আৰু '1' উপাদান কি কি ?

(o) Let $(B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ be a Boolean algebra, and $a \in B$. Write the value of $a' \wedge a''$ and $a' \vee a''$.

ধৰা হ'ল $(B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ এটা বুলীয় বীজগণিত, আৰু $a \in B$. $a' \wedge a''$ আৰু $a' \vee a''$-ৰ মান লিখা।

2. Answer ***any five*** questions : $2\times5=10$

যিকোনো পাঁচটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) Prove that in the chain N, m is covered by n if and only if $n = m+1, \forall n, m \in N$.

প্ৰমাণ কৰা যে N শৃংখলত, m, n -ৰদ্বাৰা আবৃত যদি আৰু যদিহে $n = m+1, \forall n, m \in N$ ।

(b) Let P, Q and R be three posets. Let $\psi_1 : P \to Q$ and $\psi_2 : Q \to R$ be order-preserving maps. Then, prove that $\psi_2 \circ \psi_1$ is order-preserving.

ধৰা হ'ল P, Q আৰু R তিনিটা আংশিকভাৱে ক্ৰমিত সংহতি। ধৰা হ'ল $\psi_1 : P \to Q$ আৰু $\psi_2 : Q \to R$ ক্ৰম-সংৰক্ষণকাৰী ফলন। তেনে হলে প্ৰমাণ কৰা যে $\psi_2 \circ \psi_1$ ক্ৰম-সংৰক্ষণকাৰী ফলন।

(c) Give an example of a poset which has exactly one maximal element, but does not have a greatest element.

এটা আংশিকভাৱে ক্ৰমিত সংহতিৰ উদাহৰণ দিয়া য'ত হুবহু এটা 'সৰ্বোচ্চ' (maximal) উপাদান থাকে, কিন্তু 'গৰিষ্ঠ (greatest) উপাদান নাই।

(d) Prove that in a distributive lattice, each element has at most one complement.

প্ৰমাণ কৰা যে এটা বিতৰণবিধি যুক্ত জালীত প্ৰতিটো মৌলৰ সৰ্বাধিক এটা পূৰক থাকে।

(e) Prove that every distributive lattice is modular.

প্ৰতিটো বিতৰণবিধি যুক্ত জালীক মডিউলাৰ বুলি প্ৰমাণ কৰা।

(f) Let $f : B \to C$, where B and C are Boolean algebras. Assume that f is a lattice homomorphism. Prove that if $f(0)=0$, $f(1)=1$, then $f(a') = (f(a))'$, $\forall a \in B$.

ধৰা হ'ল $f : B \to C$, য'ত B আৰু C বুলীয় বীজগণিত। ধৰি লোৱা যে f এটা জালী অনুৰূপতা। প্ৰমাণ কৰা যে যদি $f(0)=0$, $f(1)=1$, তেনে হলে $f(a') = (f(a))'$, $\forall a \in B$.

(g) Draw the switching circuit of

$$p = x_1\left(x_2(x_3+x_4) + x_3(x_5+x_6)\right)$$

চুইচিং বৰ্তনী

$$p = x_1\left(x_2(x_3+x_4) + x_3(x_5+x_6)\right)$$

অংকন কৰা।

(h) Write the symbolic representation of *'Identity-gate'* and *'Or-gate'*.

'Identity-gate' আৰু *'Or-gate'*-ৰ প্ৰতীকী উপস্থাপন লিখা।

3. Answer ***any four*** questions : 5×4=20

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) Let $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ and define $\psi : \mathcal{P}(X) \to 2^n$ by $\psi(A) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n)$, where,

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & , i \in A \\ 0 & , i \notin A \end{cases}$$

where

$2^n = \{(i_1, i_2, \ldots, i_n) : i_j\text{'s are 0 or 1}, \forall j = 1, 2, \ldots, n\}$

Prove that ψ is an order-isomorphism.

ধৰা হ'ল $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ আৰু $\psi : \mathcal{P}(X) \to 2^n$ য'ত $\psi(A) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n)$ আৰু

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & , i \in A \\ 0 & , i \notin A \end{cases}$$

ইয়াত $2^n = \{(i_1, i_2, \ldots, i_n) : i_j$ হৈছে 0 বা 1, $\forall j = 1, 2, \ldots, n\}$

প্ৰমাণ কৰা যে ψ এটা ক্ৰম-সংৰক্ষণকাৰী সমকাৰিকতা।

(b) Let S be the set of all positive divisors of 60, ordered by divisibility. Draw Hasse diagram of the poset S. Also, find the greatest element and the least element of the poset. 3+2=5

ধৰা হ'ল S, 60-ৰ সকলো ধনাত্মক ভাজকৰ সংহতি, বিভাজ্যতাৰে ক্ৰম কৰা। আংশিকভাৱে ক্ৰমিত সংহতি S-ৰ 'Hasse' চিত্ৰটো অংকন কৰা। লগতে গৰিষ্ঠ উপাদান (greatest element) আৰু লঘিষ্ঠ উপাদান (least element)টো বিচাৰি উলিওৱা।

(c) Let P and Q be two partially ordered sets. $(P \times Q, \leq)$ becomes a poset with respect to the partial order relation '$\leq$' defined by

$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 \leq y_1 \text{ and } x_2 \leq y_2)$,

$\forall x_1, x_2 \in P, \quad y_1, y_2 \in Q$.

Prove that $(a_1, b_1) \prec (a_2, b_2)$ in $P \times Q$ if and only if $(a_1 = a_2 \text{ and } b_1 \prec b_2)$ or $(a_1 \prec a_2 \text{ and } b_1 = b_2)$

ধৰা হ'ল P আৰু Q দুটা আংশিকভাৱে ক্ৰমিত সংহতি। $(P \times Q, \leq)$ আংশিক ক্ৰম সম্পৰ্ক '$\leq$'-ৰ সৈতে এটা আংশিকভাৱে ক্ৰমিত সংহতি হৈ পৰে। '$\leq$' -ৰ সংজ্ঞাটো হ'ল

$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 \leq y_1 \,\&\, x_2 \leq y_2)$,

$\forall x_1, x_2 \in P, \quad y_1, y_2 \in Q$.

প্ৰমাণ কৰা যে $P \times Q$-ত

$(a_1, b_1) \prec (a_2, b_2)$ যদি আৰু যদিহে

$(a_1 = a_2$ আৰু $b_1 \prec b_2)$ বা $(a_1 \prec a_2$ আৰু $b_1 = b_2)$

(d) Let P be a lattice. Then for all $a, b, c, d \in P$, prove that 1+2+2=5

(i) $a \le a \vee b$,

(ii) $a \le b \Rightarrow (a \vee c \le b \vee c$ and $a \wedge c \le b \wedge c)$,

(iii) $(a \le b$ and $c \le d) \Rightarrow$ $(a \vee c \le b \vee d$ and $a \wedge c \le b \wedge d)$

ধৰা হ'ল P এটা জালী। তেনেহলে সকলো $a, b, c, d \in P$-ৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা যে

(i) $a \le a \vee b$,

(ii) $a \le b \Rightarrow (a \vee c \le b \vee c$ আৰু $a \wedge c \le b \wedge c)$,

(iii) $(a \le b$ আৰু $c \le d) \Rightarrow$ $(a \vee c \le b \vee d$ আৰু $a \wedge c \le b \wedge d)$

(e) If L is a lattice, then prove that

$$x \wedge (y \vee z) \ge (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \forall x, y, z \in L$$

যদি L এটা জালী হয়, তেনেহলে প্ৰমাণ কৰা যে

$$x \wedge (y \vee z) \ge (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \forall x, y, z \in L$$

(f) Prove that, if a lattice L is distributive, then

$$(x \wedge y = x \wedge z, x \vee y = x \vee z) \Rightarrow (y = z), \forall x, y, z \in L$$

যদি L এটা বিতৰণবিধি যুক্ত জালী, তেনেহলে প্ৰমাণ কৰা যে

$$(x \wedge y = x \wedge z, x \vee y = x \vee z) \Rightarrow (y = z), \forall x, y, z \in L$$

(g) Let L be a distributive lattice with '0' and '1'. Prove that if the element a has a complement a', then

$$a \vee (a' \wedge b) = a \vee b$$

ধৰা হ'ল L '0' আৰু '1'-ৰ সৈতে বিতৰণ বিধি যুক্ত এটা জালী। যদি a-ৰ এটা পূৰক a' হয়, তেনেহলে প্ৰমাণ কৰা যে

$$a \vee (a' \wedge b) = a \vee b$$

(h) Show that $(\{1, 3, 6, 9, 18\}$, gcd, lcm) does not form a Boolean algebra for the set of positive divisors of 18. Is it a lattice? Justify your answer. 2+3=5

দেখুওৱা যে ($\{1, 3, 6, 9, 18\}$ গ.সা.উ., ল.সা.গু) এ 18-ৰ ধনাত্মক ভাজকৰ সংহতিৰ বাবে এটা বুলীয় বীজগণিত গঠন নকৰে। ই এটা জালী নেকি ? উত্তৰৰ ন্যায্যতা প্ৰদান কৰা।

4. Answer ***any four*** questions : 10×4=40

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) Let $(P, \leq)$ and $(Q, \leq)$ be two partially ordered sets, where P and Q are disjoint sets. Let $x \leq y$ be defined on $P \cup Q$ if and only if either $x, y \in P$ and $x \leq y$ in P or, $x, y \in Q$ and $x \leq y$ in Q. Again, let $x \leq' y$ be defined on $P \cup Q$ if and only if either $x, y \in P$ and $x \leq y$ in P or, $x, y \in Q$ and $x \leq y$ in Q, or $x \in P$, $y \in Q$. Prove that both $(P \cup Q, \leq)$ and $(P \cup Q, \leq')$ are partially ordered sets.

Let $P = \{x, y\}$, such that $x < y$ and $Q = \{a, b, c\}$ such that $a < b < c$. Draw Hasse diagram of $(P \cup Q, \leq)$ and $(P \cup Q, \leq')$. 6+4=10

ধৰা হ'ল $(P, \leq)$ আৰু $(Q, \leq)$ দুটা আংশিকভাৱে ক্ৰমিত সংহতি, য'ত P আৰু Q হৈছে অছেদিত সংহতি। $P \cup Q$-ৰ ওপৰত $x \leq y$ সংজ্ঞায়িত কৰা হওক যদি আৰু যদিহে $x, y \in P$ আৰু P-ত $x \leq y$, বা $x, y \in Q$ আৰু Q-ত $x \leq y$. আকৌ $P \cup Q$-ৰ ওপৰত $x \leq' y$ সংজ্ঞায়িত কৰা হ'ব যদি আৰু যদিহে $x, y \in P$ আৰু P-ত $x \leq y$ বা $x, y \in Q$ আৰু Q-ত $x \leq y$ বা $x \in P$, $y \in Q$. প্ৰমাণ কৰা যে $(P \cup Q, \leq)$ আৰু $(P \cup Q, \leq')$ উভয়ে আংশিকভাৱে ক্ৰমিত সংহতি।

$P = \{x, y\}$ এনেকৈ ধৰা হ'ল যে $x < y$ আৰু $Q = \{a, b, c\}$ এনেকৈ ধৰা হ'ল যে $a < b < c$. $(P \cup Q, \leq)$ আৰু $(P \cup Q, \leq')$-ৰ Hasse চিত্ৰ অংকন কৰা।

(b) Let P and Q be finite partially ordered sets and let $\psi : P \rightarrow Q$ be a bijective map. Then, prove that the following are equivalent :

ধৰা হ'ল P আৰু Q সসীম আংশিকভাৱে ক্ৰমিত সংহতি, আৰু ধৰা যে $\psi : P \rightarrow Q$ এটা একৈকী আচ্ছাদিত চিত্ৰণ। তেনেহলে প্ৰমাণ কৰা যে তলত দিয়াবোৰ সমতুল্য ঃ

(i) ψ is an order-isomorphism

ψ এটা ক্ৰম-সংৰক্ষণকাৰী চিত্ৰণ

(ii) $x < y$ in P if and only if $\psi(x) < \psi(y)$ in Q

P-ত $x < y$ যদি আৰু যদিহে Q-ত $\psi(x) < \psi(y)$

Contd.

(iii) $x \prec y$ in P if and only if $\psi(x) \prec \psi(y)$ in Q

P-ত $x \prec y$ যদি আৰু যদিহে Q-ত $\psi(x) \prec \psi(y)$

Prove that two finite partially ordered sets P and Q are order-isomorphic if and only if they can be drawn with identical Hasse diagrams. 6+4=10

প্ৰমাণ কৰা যে দুটা সসীম আংশিকভাৱে ক্ৰমিত সংহতি P আৰু Q ক্ৰম-সংৰক্ষণকাৰী একৈকী সমকাৰিক যদি আৰু যদিহে ইহঁতক অভিন্ন Hasse চিত্ৰৰে আঁকিব পাৰি।

(c) Let P be a set on which a binary relation '$<$' is defined such that for all $x, y, z \in P$

(i) $x < x$ is false,

(ii) $(x < y \text{ and } y < z) \Rightarrow (x < z)$.

Prove that if '$\leq$' is defined by $x \leq y \Leftrightarrow (x < y \text{ or } x = y)$, then '$\leq$' is a partial order relation on P. Also, prove that every partial order on P arises from a relation '$<$' satisfying (i) and (ii).

ধৰা হ'ল P এটা সংহতি য'ত '$<$' সম্পৰ্ক এনেদৰে সংজ্ঞায়িত কৰা হৈছে যে P-ত সকলো $x, y, z \in P$-ৰ বাবে

(i) $x < x$ মিছা,

(ii) $(x < y$ আৰু $y < z) \Rightarrow (x < z)$

প্ৰমাণ কৰা যে যদি '$\leq$' -ৰ সংজ্ঞা $x \leq y \Leftrightarrow (x < y$ বা $x = y)$ হয়, তেনেহলে '$\leq$' P-ৰ ওপৰত এটা আংশিক ক্ৰম সম্পৰ্ক হ'ব। লগতে, প্ৰমাণ কৰা যে P-ৰ ওপৰত প্ৰতিটো আংশিক ক্ৰম সম্পৰ্ক (i) আৰু (ii) সন্তুষ্ট কৰা '$<$' সম্পৰ্কৰ পৰা উদ্ভৱ হয়।

(d) Prove that a lattice ordered set $(L, \leq)$ can be converted to algebraic lattice $(L, \wedge, \vee)$ and conversely.

প্ৰমাণ কৰা যে এটা আংশিকভাৱে ক্ৰমিত জালী $(L, \leq)$-ক বীজগণিতীয় জালী $(L, \wedge, \vee)$ লৈ আৰু বীজগণিতীয় জালী $(L, \wedge, \vee)$ ক আংশিকভাৱে ক্ৰমিত $(L, \leq)$ জালীলৈ ৰূপান্তৰ কৰিব পাৰি।

(e) Show that a sublattice of a distributive lattice is distributive. Prove that for any two elements x, y in a lattice L, the 'interval' $[x, y] = \{a \in L \mid x \leq a \leq y\}$ is a sublattice of L. 5+5=10

দেখুওৱা যে এটা বিতৰণ বিধিযুক্ত জালীৰ উপজালীও বিতৰণ বিধিযুক্ত। প্ৰমাণ কৰা যে জালী L-ৰ যিকোনো দুটা মৌল x, y-ৰ বাবে 'অন্তৰাল' $[x, y] = \{a \in L \mid x \leq a \leq y\}$ L-ৰ এটা উপজালী।

Contd.

(f) Show that the set N, having partially ordered by 'divisibility' is a distributive lattice. Is it complemented? Show that the partially ordered subset

$Q = \{1, 2, 4, 5, 6, 12, 20, 30, 60\}$ of $(N_0, \leq)$, where $N_0 = N \cup \{0\}$ and $a \leq b \Leftrightarrow a \mid b$ is not a lattice.

6+2+2=10

দেখুওৱা যে 'বিভাজ্য'ৰ দ্বাৰা আংশিকভাৱে ক্ৰমিত হোৱা N সংহতিটো বিতৰণ বিধি মানা এটা জালী। ই পূৰকযুক্ত (complemented) নেকি ? দেখুওৱা যে $(N_0, \leq)$-ৰ আংশিকভাৱে ক্ৰমিত উপসংহতি

$Q = \{1, 2, 4, 5, 6, 12, 20, 30, 60\}$ এটা জালী নহয় য'ত $N_0 = N \cup \{0\}$ আৰু $a \leq b \Leftrightarrow a \mid b$.

(g) There are electrical switches next to the three doors in a large room to operate the central lighting. The three switches operate alternatively; i.e., each switch can switch on or switch off the lights. Determine the switching circuit p, its symbolic representation, and contact diagram. Each switch has two positions — either on or off.

4+2+4=10

চেণ্ট্ৰেল লাইটিং চলাবলৈ এটা ডাঙৰ কোঠাৰ তিনিটা দুৱাৰৰ কাষতে বৈদ্যুতিক চুইচ আছে। তিনিটা চুইচে বিকল্পভাৱে কাম কৰে, অৰ্থাৎ প্ৰতিটো চুইচে লাইট অন বা বন্ধ কৰিব পাৰে। চুইচিং বৰ্তনী p, ইয়াৰ প্ৰতীকী উপস্থাপন নিৰ্ণয় কৰা আৰু 'কানেক্টিং' চিত্ৰ অংকন কৰা। প্ৰতিটো চুইচৰ দুটা অৱস্থান থাকে — হয় অন্ বা অফ্।

(h) Define Boolean algebra and Boolean homomorphism. Prove that, for all x, y in a Boolean algebra 1+1+8=10

বুলীয় বীজগণিত আৰু বুলীয় অনুৰূপতাৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্ৰমাণ কৰা যে এটা বুলীয় বীজগণিতত সকলো x, y-ৰ বাবে

(i) $(x \wedge y)' = x' \vee y'$

(ii) $(x \vee y)' = x' \wedge y'$

(iii) $x \leq y \Leftrightarrow x' \geq y'$

(iv) $x \leq y \Rightarrow (x \wedge y' = 0)$

'0' is the 'zero element' of the Boolean algebra.

'0' হ'ল বুলীয় বীজগণিতৰ 'শূন্য উপাদান'।

Contd.

(i) Define atom of a Boolean algebra. Prove that every finite Boolean algebra has at least one atom. Prove that if p and q are atoms in a Boolean algebra such that $p \neq q$, then $p \wedge q = 0$.

1+5+4=10

এটা বুলীয় বীজগণিতৰ ‘এটম’ৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্রমাণ কৰা যে প্রতিটো সসীম বুলীয় বীজগণিতত অন্ততঃ এটা ‘এটম’ থাকে। প্রমাণ কৰা যে যদি p আৰু q এটা বুলীয় বীজগণিতৰ ‘এটম’ হয় য'ত $p \neq q$, তেনেহলে $p \wedge q = 0$ ।

(j) Let B be a finite Boolean algebra. Then prove that there exists a set X such that B is isomorphic to $\mathscr{P}(X)$.

ধৰা হ'ল B এটা সসীম বুলীয় বীজগণিত। তেনেহলে প্রমাণ কৰা যে এনে এটা সংহতি X আছে, য'ত B, $\mathscr{P}(X)$-ৰ একৈকী সমকাৰিক।