

Total number of printed pages-11

1 (Sem-2) MAT

2025

MATHEMATICS

Paper : MAT0200104

(Calculus)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

**The figures in the margin indicate full marks for the questions.**

Answer **either** in English **or** in Assamese.

1. Answer the following questions : 1×8=8

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Find (মান নিৰ্ণয় কৰা) :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{4}{x^2-4} \right)$$



(b) A function  $f$  is defined as

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - m^2}{x - m} & , \text{ if } x \neq m \\ 0 & , \text{ if } x = m \end{cases}$$

Is the function continuous at  $x = m$ ?

এটা ফলন  $f$  তলত দিয়া ধৰণে সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হৈছে।

$x = m$  বিন্দুত ফলনটো অবিচ্ছিন্ন হয় নে?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - m^2}{x - m} & , \text{ if } x \neq m \\ 0 & , \text{ if } x = m \end{cases}$$

(c) What is the  $n^{\text{th}}$  derivative of  $e^{ax}$ ?

$e^{ax}$  অৰ  $n$ -তম অৱকলজটো কি?

(d) Write the value of  $\int_0^{\pi/2} \cos^7 x dx$ .

$\int_0^{\pi/2} \cos^7 x dx$  অৰ মান লিখা।

(e) Write in sigma notation the  $n^{\text{th}}$  Maclaurin polynomial for a function  $f$ .

$f$  ফলনৰ  $n$ -তম মেক্লেৰিন বহুপদীটো চিগ্মা চিহ্নত লিখা।

(f) Find the slope of the surface  $z = x^2y + 5y^3$  in the  $x$ -direction at the point  $(1, -2)$ .

$z = x^2y + 5y^3$  পৃষ্ঠৰ  $(1, -2)$  বিন্দুত  $x$  অৰ দিশত প্ৰৱণতা নিৰ্ণয় কৰা।

(g) If  $f(x, y) = \sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ , find  $f_{xy}$ .

যদি  $f(x, y) = \sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ , তেন্তে  $f_{xy}$  উলিওৱা।

(h) Write down the value of  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$ ,

if  $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ .

$z = f\left(\frac{y}{x}\right)$  হ'লে  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$  -ৰ মান লিখা।

2. Answer **any six** questions : 2×6=12

যিকোনো ছয়টা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Show with  $\varepsilon$ - $\delta$  definition of limit that

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 2) = 5.$$

চৰমমানৰ  $\varepsilon$ - $\delta$  সংজ্ঞাৰ সহায়ত দেখুওৱা যে

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 2) = 5$$

(b) Using the Intermediate Value Theorem, show that the equation

$$5x^3 - 2x^2 + 3x = 4 \text{ has at least one solution between 0 and 1.}$$

মধ্যমমান উপপাদ্যৰ সহায় লৈ দেখুওৱা যে

$$5x^3 - 2x^2 + 3x = 4 \text{ সমীকৰণটোৰ অন্ততঃ এটা সমাধান 0 আৰু 1-ৰ মাজত আছে।}$$

(c) If (যদি)  $y = e^{x^2-1}$ , prove that (প্ৰমাণ কৰা

$$\text{যে) } (1 + x^2) y_2 + (2x - 1) y_1 = 0.$$

(d) If  $y = x^{n-1} \log x$ , find  $y_n$ .

যদি  $y = x^{n-1} \log x$ , তেন্তে  $y_n$  নিৰ্ণয় কৰা।

(e) Evaluate (মান উলিওৱা) :

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^6)^{7/2}} dx$$

(f) Verify Rolle's theorem for the function  $f(x) = x^2 - 2x - 3$  on the interval  $[-1, 3]$ .

$[-1, 3]$  অন্তৰালত  $f(x) = x^2 - 2x - 3$  ফলনটোৰ বাবে ৰ'লৰ উপপাদ্যটো সাব্যস্ত কৰা।

(g) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\log(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}, x > 0.$$

(h) If  $w = y^3 e^{2x+3z}$ , find  $\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial y}$  and  $\frac{\partial w}{\partial z}$ .

যদি  $w = y^3 e^{2x+3z}$ , তেন্তে  $\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial y}$  আৰু  $\frac{\partial w}{\partial z}$

উলিওৱা।

(i) If  $f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z - 2xz$ , find  $f_{xy}$  and  $f_{zx}$ .

যদি  $f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z - 2xz$ , তেন্তে  $f_{xy}$  আৰু  $f_{zx}$  নিৰ্ণয় কৰা।

(j) If (যদি)  $u = \frac{x^2 y^2}{x+y}$ , prove that

(প্রমাণ করা যে)  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 3u$ .

3. Answer **any four** questions : 5×4=20

যিকোনো চারিটা প্রশ্নের উত্তর করা :

(a) Find (মান নির্ণয় করা) :

(i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$

(ii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3-2}}$

(b) For what value of  $k$  the following function is continuous?

$k$ -র কি মানের বাবে তলত দিয়া ফলনটো অবিচ্ছিন্ন হবে?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{7x+2} - \sqrt{6x+4}}{x-2} & \text{if } x \geq -\frac{2}{7} \text{ and } x \neq 2 \\ k & \text{if } x = 2 \end{cases}$$

(c) If (যদি)  $y = e^{m \sin^{-1} x}$ , prove that  
(প্রমাণ করা যে)

$$(1-x^2) y_{n+2} - (2n+1) x y_{n+1} - (n^2 + m^2) y_n = 0.$$

(d) Obtain reduction formula for

$\int \tan^n x dx$ . If  $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$ , show that

(i)  $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$

(ii)  $n(I_{n-1} + I_{n+1}) = 1$

$\int \tan^n x dx$ -র হ্রাসমান সূত্র উলিওরা। যদি

$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$ , তেন্তে দেখুওরা যে

(i)  $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$

(ii)  $n(I_{n-1} + I_{n+1}) = 1$

(e) (i) Apply Rolle's theorem on the function  $f(x) = (x-1) \sin x$  to show that the equation  $x + \tan x = 1$  has at least one root in the interval  $(0, 1)$ .

$f(x) = (x-1) \sin x$  ফলনটোত ব'লৰ

উপপাদ্য প্ৰয়োগ কৰি দেখুওৱা যে

$x + \tan x = 1$  সমীকৰণটোৰ অন্ততঃ এটা মূল

$(0, 1)$  অন্তৰালত আছে।

- (ii) If a function  $f$  defined on  $[a, b]$  satisfies the conditions of Lagrange's Mean Value Theorem and  $f'(x) = 0 \forall x \in [a, b]$ , then show that  $f(x)$  is constant on  $[a, b]$ .

$[a, b]$  অন্তৰালত সংজ্ঞাৰদ্ধ এটা ফলন  $f$  এ যদি লাগ্ৰাঞ্জৰ মধ্যমান উপপাদ্যটোৰ চৰ্ত কেইটা মানি

চলে আৰু  $f'(x) = 0 \forall x \in [a, b]$ , তেন্তে দেখুওৱা যে  $[a, b]$  অন্তৰালত  $f(x)$  এটা ধ্ৰুৱক।

- (f) Expand  $\cos x$  by Maclaurin series.

$\cos x$  অৰ মেক্লেৰিন শ্ৰেণী বিস্তাৰ কৰা।

- (g) If (যদি)  $u = x^2 \tan^{-1} \frac{y}{x} - y^2 \tan^{-1} \frac{x}{y}$ ,  $xy \neq 0$ ,

prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

- (h) If  $z = \cot^{-1} \left( \frac{x+y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right)$ , show by Euler's

theorem that  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{4} \sin 2z = 0$ .

যদি  $z = \cot^{-1} \left( \frac{x+y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right)$ , অইলাৰৰ উপপাদ্যৰ

সহায়ত প্ৰমাণ কৰা যে

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{4} \sin 2z = 0$$

4. Answer **any two** questions : 10×2=20

যিকোনো দুটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) When is a function said to be continuous at a point? Examine the continuity of the function

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , x \leq 0 \\ 5x-4 & , 0 < x < 1 \\ 4x^2-3x & , 1 < x < 2 \\ 3x+4 & , x \geq 2 \end{cases}$$

at the points  $x = 0, 1, 2$ .

এটা ফলনক এটা বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন বুলি কেতিয়া কোৱা হয়?  $x = 0, 1, 2$  বিন্দুত  $f(x)$  ফলনটোৰ অবিচ্ছিন্নতা পৰীক্ষা কৰা —

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , x \leq 0 \\ 5x-4 & , 0 < x < 1 \\ 4x^2-3x & , 1 < x < 2 \\ 3x+4 & , x \geq 2 \end{cases}$$

(b) Obtain  $\frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{1}{ax+b} \right)$ . Hence, find the

$$n^{\text{th}} \text{ derivative of } y = \frac{x}{x^2+a^2}.$$

$$\frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{1}{ax+b} \right) \text{ নিৰ্ণয় কৰা। ইয়াৰ সহায়ত}$$

$$y = \frac{x}{x^2+a^2} \text{-ৰ } n\text{-তম অৱকলজ উলিওৱা।}$$

(c) Obtain reduction formula for  $\int \sin^n x dx$ . Hence evaluate  $\int \sin^6 x dx$ .

$\int \sin^n x dx$  অৱ হ্রাসমান সূত্র উলিওৱা। ইয়াৰ সহায়ত  $\int \sin^6 x dx$  অৱ মান উলিওৱা।

(d) (i) Write Taylor's formula with remainder.

ভাগশেষৰ সৈতে টেইলৰৰ সূত্রটো লিখা।

(ii) Expand  $\sin x$  in powers of  $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ .

$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ -ৰ ঘাতত  $\sin x$  অৱ বিস্তাৰ কৰা।

(e) If (যদি)  $u = \tan^{-1} \left( \frac{x^3+y^3}{x-y} \right)$ ,  $x \neq y$ , show that (দেখুওৱা যে)

$$(i) \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$$

$$(ii) \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (1 - 4 \sin^2 u) \sin 2u$$