

Total number of printed pages-11

1 (Sem-4) MAT 2

2025

**MATHEMATICS**

Paper : MAT0400204

**(Complex Analysis)**

Full Marks : 45

Time : Two hours

**The figures in the margin indicate full marks for the questions.**

Answer **either** in English **or** in Assamese.

1. Answer the following as directed :  $1 \times 5 = 5$

নিৰ্দেশনা মতে তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া :

(i) Sketch the set  $\text{Im } z > 1$ :

$\text{Im } z > 1$  সংহতিটো অংকন কৰা।

(ii) Describe the domain of the function

$$\frac{1}{z^2 + 1}$$

$\frac{1}{z^2 + 1}$  ফলনৰ আদিক্ষেত্র লিখা।



(iii) Write the function  $f(z) = z^3 + z + 1$  in the form  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ .

$$f(z) = z^3 + z + 1 \text{ ফলনটো}$$

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \text{ আকাৰত লিখা।}$$

(iv) Show that  
দেখুওৱা যে

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{4z^2}{(z-1)^2} = 4.$$

(v) Define entire functions.

সকলো ঠাইতে বিশ্লেষণাত্মক (Entire) ফলন সংজ্ঞায়িত কৰা।

2. Answer **any five** of the following questions :  
 $2 \times 5 = 10$

তলৰ যিকোনো পাঁচটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(i) What do you mean by the accumulation point of a set? Determine the accumulation point of the set  $z_n = i^n (n = 1, 2, \dots)$ .

এটা সংহতিৰ সীমাবিন্দু বুলিলে কি বুজায়?

$z_n = i^n (n = 1, 2, \dots)$  গোটটোৰ সীমাবিন্দু নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) Show that if a function  $f(z)$  is continuous and non-zero at a point  $z_0$  then  $f(z) \neq 0$  throughout some neighbourhood of that point.

দেখুওৱা যে যদি  $f(z)$  ফলনটো  $z_0$  বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন আৰু অশূন্য হয় তেন্তে সেই বিন্দুৰ কোনোবা এটা চুবুৰীত  $f(z) \neq 0$ ।

(iii) Show that the function  $f(z) = z^2$  is entire.

দেখুওৱা যে  $f(z) = z^2$  ফলনটো সকলো ঠাইতে বিশ্লেষণাত্মক (Entire) হয়।

(iv) Using Cauchy-Riemann equations determine where  $f'(z)$  exists, when  $f(z) = 1/z$ .

Cauchy-Riemann সমীকৰণ ব্যৱহাৰ কৰি  $f(z) = 1/z$  হলে তা  $f'(z)$  কত থাকে সেইটো নিৰ্ণয় কৰা।

(v) Find  $z$  such that  $e^z = 1 + \sqrt{3}i$ .

$z$  বিচাৰি উলিওৱা যাতে  $e^z = 1 + \sqrt{3}i$  হয়।

(vi) Show that the function

$$f(z) = 2z^2 - 3 - ze^z + e^{-z} \text{ is entire.}$$

দেখুওৱা যে  $f(z) = 2z^2 - 3 - ze^z + e^{-z}$  ফলনটো সকলো ঠাইতে বিশ্লেষণাত্মক (Entire) হয়।

(vii) Show that

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \text{ where } z = x + iy.$$

দেখুওৱা যে  $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$  য'ত  $z = x + iy$ ।

(viii) Evaluate the integral  $\int_0^\infty e^{-z} dt, (\operatorname{Re} z > 0)$ .

$\int_0^\infty e^{-z} dt, (\operatorname{Re} z > 0)$  অনুকলটোৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(ix) Evaluate the contour integral  $\int_C \frac{dz}{z}$  where  $C$  is the top half of the circle  $|z|=1$  from  $z=1$  to  $z=-1$ .

Contour অনুকল  $\int_C \frac{dz}{z}$  ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা য'ত  $C$  হৈছে  $z=1$  ৰ পৰা  $z=-1$  লৈকে বৃত্ত  $|z|=1$  ৰ ওপৰৰ অৰ্ধেক।

(x) Show that

দেখুওৱা যে

$$\left| \int_C \frac{z+4}{z^3-1} dz \right| \leq \frac{6\pi}{7}.$$

3. Answer **any four** of the following questions: 5×4=20

তলৰ যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(i) Suppose that  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  where  $z = x + iy$  and

$z_0 = x_0 + iy_0, w_0 = u_0 + iv_0$ . Then prove that  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$  if

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \text{ and}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0.$$

ধৰি লোৱা যে  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  য'ত  $z = x + iy$  আৰু  $z_0 = x_0 + iy_0, w_0 = u_0 + iv_0$ ।  
প্ৰমাণ কৰা যে  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$  যদি

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \text{ আৰু}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0।$$

(ii) Suppose  $f(z) = \bar{z}$ . Examine where  $\frac{dw}{dz}$  exists.

ধৰি লোৱা যে  $f(z) = \bar{z}$ ।  $\frac{dw}{dz}$  কত আছে পৰীক্ষা কৰা।

(iii) Suppose that  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  and its conjugate

$\overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$  are analytic in a domain  $D$ . Then show that  $f(z)$  must be constant throughout  $D$ .

ধৰি লোৱা যে  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  আৰু ইয়াৰ সংযুগী  $\overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$  domain  $D$  ত বিশ্লেষণাত্মক হয়। দেখুওৱা যে  $f(z), D$  ত ধ্ৰুৱক হয়।

(iv) Show that if  $f'(z) = 0$  everywhere in a domain  $D$  then  $f(z)$  must be constant throughout  $D$ .

যদি এটা domain  $D$  ৰ সকলোতে  $f'(z) = 0$  হয়, দেখুওৱা যে  $f(z), D$  ত ধ্ৰুৱক হয়।

(v) What do you mean by harmonic functions? Show that if a function  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  is analytic in a domain  $D$  then its component functions  $u$  and  $v$  are harmonic in  $D$ .

Harmonic ফলন বুলিলে কি বুজায়? দেখুওৱা যে যদি এটা ফলন  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  এটা domain  $D$  ত বিশ্লেষণাত্মক হয়, তেন্তে ইয়াৰ উপাদান ফলন  $u$  আৰু  $v, D$  ত harmonic হয়।

(vi) Define complex exponential function and show that it is entire.

জটিল exponential ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া আৰু দেখুওৱা যে ই সকলো ঠাইতে বিশ্লেষণাত্মক (Entire) হয়।

(vii) Show that দেখুওৱা যে

$$(1+i)^i = \exp\left(-\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) \exp\left(i\frac{\ln 2}{2}\right), n \in \mathbb{Z}.$$

(viii) Let  $C$  denote the positively oriented boundary of the square whose sides lie along the lines  $x = \pm 2$  and  $y = \pm 2$ . Applying the Cauchy's integral formula

evaluate  $\int_C \frac{e^{-z}}{z - \pi i / 2} dz$ .

ধৰা হওক  $C$  য়ে বৰ্গটোৰ ধনাত্মকভাৱে অভিমুখী সীমা বুজাওক যাৰ কাষবোৰ  $x = \pm 2$  আৰু  $y = \pm 2$  ৰেখাত পৰি আছে। Cauchy's integral সূত্র প্ৰয়োগ কৰি

$$\int_C \frac{e^{-z}}{z - \pi i / 2} dz \text{ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।}$$

4. Answer **any one** of the following questions:  
10×1=10

তলৰ যিকোনো এটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া :

(i) Suppose that  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  and that  $f'(z)$  exists at a point  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Prove that the first order partial derivatives of  $u$  and  $v$  must exist at  $(x_0, y_0)$  and they must satisfy the Cauchy-Riemann equations there. Also show that  $f'(z_0) = u_x + iv_x = v_y - iv_y$  where partial derivatives are to be evaluated at  $(x_0, y_0)$ .

ধৰি লোৱা যে  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  আৰু  $f'(z)$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0$  বিন্দুত সংজ্ঞাবদ্ধ হয়। প্ৰমাণ কৰা যে  $u$  আৰু  $v$  ৰ প্ৰথম ক্ৰমৰ আংশিক অৱকলজ  $(x_0, y_0)$  ত থাকিব লাগিব আৰু তাত Cauchy-Riemann সমীকৰণ সন্তুষ্ট কৰিব লাগিব। লগতে

দেখুওৱা যে  $f'(z_0) = u_x + iv_x = v_y - iv_y$  য'ত আংশিক অৱকলজ সমূহৰ মান  $(x_0, y_0)$  ত উলিয়াব লাগে।

(ii) Show that if  $w(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $a \leq t \leq b$  is a continuous function then

$$\left| \int_a^b w(t) dt \right| \leq \int_a^b |w(t)| dt.$$

Suppose  $C$  is a contour of length  $L$  and  $f$  is continuous of  $C$ . If  $M$  is non-negative constant such that  $|f(z)| \leq M$ ,  $\forall z \in C$  at which  $f(z)$  is defined the using the above result show that

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML.$$

যদি  $w(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $a \leq t \leq b$  অবিচ্ছিন্ন হয়, তেন্তে

$$\left| \int_a^b w(t) dt \right| \leq \int_a^b |w(t)| dt.$$

ধৰি লোৱা হ'ল  $C$ ,  $L$  দৈৰ্ঘ্যৰ contour হয় আৰু  $f, C$  ত অবিচ্ছিন্ন হয়। যদি  $M$  অঋণাত্মক ধ্ৰুৱক হয় যাতে সকলো  $\forall z \in C$  ৰ বাবে  $|f(z)| \leq M$ । উপৰৰ ফলাফল ব্যৱহাৰ কৰা দেখুওৱা যে

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML.$$

(iii) State and prove Liouville's theorem.

Liouville-ৰ উপপাদ্যটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

(iv) Suppose that a function  $f(z)$  is continuous in a domain  $D$ . Show that the following statements are equivalent:

(a) The integrals of  $f(z)$  along contours lying entirely in  $D$  and extending from any fixed point  $z_1$  to any fixed point  $z_2$  all have the same value.

(b) The integrals of  $f(z)$  around closed contours lying entirely in  $D$  all have value zero.

ধৰি লোৱা যে এটা ফলন  $f(z)$  এটা domain  $D$  ত অবিচ্ছিন্ন হয়। দেখুওৱা যে নিম্নলিখিত বিবৃতিসমূহ সমতুল্য :

(a) সম্পূৰ্ণৰূপে  $D$  ত থকা আৰু যিকোনো স্থিৰ বিন্দু  $z_1$  ৰ পৰা যিকোনো স্থিৰ বিন্দু  $z_2$  লৈ বিস্তৃত contour ত  $f(z)$  ৰ সকলো অনুকলবোৰৰ মান একে।

(b) সম্পূৰ্ণৰূপে  $D$  ত থকা বন্ধ contour ত  $f(z)$  ৰ সকলো অকলবোৰৰ মান শূন্য।