

2018

MATHEMATICS

(General)

(Classical Algebra and Trigonometry)

Full Marks : 60

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks
for the questions

1. Answer the following questions as directed :

1×7=7

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ নিৰ্দেশ অনুসৰি উত্তৰ দিয়া :

(a) If z_1, z_2 are complex numbers, then

(i) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(ii) $|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2|$

(iii) $\text{amp} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \text{amp } z_1 - \text{amp } z_2$

(iv) $\text{amp} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \frac{\text{amp } z_1}{\text{amp } z_2}$

(Choose the correct answer)

যদি z_1, z_2 জটিল সংখ্যা হয়, তেন্তে

(i) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

(ii) $|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2|$

(2)

$$(iii) \operatorname{amp}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{amp}z_1 - \operatorname{amp}z_2$$

$$(iv) \operatorname{amp}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\operatorname{amp}z_1}{\operatorname{amp}z_2}$$

(শুদ্ধ উত্তৰটো বাচি উলিওৱা)

(b) Write -1 in the form $r(\cos\theta + i\sin\theta)$. -1 ক $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ আকৃতিত লিখা।(c) Write the expansion of $\tan^{-1}x$ in powers of x stating the necessary conditions.প্রয়োজনীয় চৰ্ত উল্লেখ কৰি x ঘাত সাপেক্ষে $\tan^{-1}x$ ৰ প্ৰসাৰণ লিখা।(d) If α, β, γ are roots of the equation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, then find the value of $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$. α, β, γ যদি $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ সমীকৰণৰ মূল হয়, তেন্তে $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$ ৰ মান উলিওৱা।(e) Write all roots of the equation $x^4 = 1$. $x^4 = 1$ সমীকৰণটোৰ আটাইবোৰ মূল লিখা।

(f) Find the limit of the following sequence :

তলৰ অনুক্ৰমটোৰ সীমা উলিওৱা :

$$\left\{ \frac{1+2+3+\dots+n}{n} \right\}$$

A9/367

(Continued)

(3)

(g) Write all roots of the equation $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$, if sum of two roots is equal to 0. $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$ সমীকৰণটোৰ আটাইবোৰ মূল লিখা যদিহে দুটা মূলৰ যোগফল 0 হয়।

2. Answer the following questions :

2×4=8

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা :

(a) If $z = -1 + i$, then find $\arg \bar{z}$ and $\operatorname{mod} \bar{z}$. $z = -1 + i$ হ'লে $\arg \bar{z}$ আৰু $\operatorname{mod} \bar{z}$ উলিওৱা।(b) If a, b, c, d are positive real numbers, then prove that

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 4$$

 a, b, c, d ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা হ'লে, প্ৰমাণ কৰা যে

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 4$$

(c) Test the convergence of the following series :

তলৰ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতাৰ পৰীক্ষা কৰা :

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

A9/367

(Turn Over)

(d) Solve (সমাধান কৰা)

$$3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$$

given that the roots are in geometric progression.

দিয়া আছে যে মূলবোৰ গুণোত্তৰ প্ৰগতিত আছে।

3. Answer any three of the following questions :

$$5 \times 3 = 15$$

তলৰ যি কোনো তিনিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Find the general value of θ , if

θ ৰ সাধাৰণ মান নিৰ্ণয় কৰা, যদি

$$(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) \dots (\cos n\theta + i \sin n\theta) = 1$$

(b) Prove that if $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$, then

প্ৰমাণ কৰা যে যদি $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$, তেন্তে

$$\sin n\theta = \cos^n \theta ({}^n C_1 \tan \theta - {}^n C_3 \tan^3 \theta + \dots)$$

$$\cos n\theta = \cos^n \theta (1 - {}^n C_2 \tan^2 \theta + {}^n C_4 \tan^4 \theta + \dots)$$

(c) Show that (দেখুওৱা যে)

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3^3} + \frac{1}{7^3}\right) + \frac{1}{5} \left(\frac{2}{3^5} + \frac{1}{7^5}\right) - \dots$$

(d) If (যদি) $\sin(\alpha + i\beta) = x + iy$, then prove that (তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে)

$$(i) \quad x^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha - y^2 \sec^2 \alpha = 1$$

$$(ii) \quad x^2 \operatorname{sech}^2 \beta + y^2 \operatorname{cosech}^2 \beta = 1$$

(e) If (যদি) $i^{\alpha+i\beta} = \alpha + i\beta$, then prove that (তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\alpha^2 + \beta^2 = e^{-(4n+1)\pi\beta}$$

4. Answer either (a) or (b) :

10

(a) অথবা (b)ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) (i) Apply Cauchy-Schwarz inequality to prove that

কছি-শ্চৱাৰ্জৰ অসমতাৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰা যে

$$abc(a+b+c) \leq b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 \quad 4$$

(ii) Test the convergence of the following series :

6

তলৰ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতাৰ পৰীক্ষা কৰা :

$$1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \frac{1+3}{1+3^2} + \frac{1+4}{1+4^2} + \dots \text{ to } \infty$$

- (b) (i) If a , b and c be unequal positive numbers such that the sum of any two is greater than third, prove that

$$\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} > \frac{9}{a+b+c} \quad 4$$

- (ii) State Leibnitz's convergence test for alternating series. Show that the series

$$\sum u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \dots$$

is absolutely convergent. Is the series $\sum u_n$ conditionally convergent? $1+4+1=6$

লিবনিজৰ একান্তৰ শ্ৰেণীৰ অভিসাৰিতাৰ পৰীক্ষাটো লিখা। দেখুওৱা যে

$$\sum u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \dots$$

শ্ৰেণীটো পৰম অভিসাৰী। $\sum u_n$ শ্ৰেণীটো চৰ্তসাপেক্ষে অভিসাৰী হয়নে?

5. (a) Solve by Cardan's method (any one) : 6

কাৰ্ডানৰ নিয়মেৰে সমাধান কৰা (যি কোনো এটা) :

$$(i) x^3 - 15x^2 - 33x + 847 = 0$$

$$(ii) x^3 - 12x + 8 = 0$$

- (b) If α , β , γ are the roots of the equation $x^3 + qx + r = 0$, form the equation whose

roots are $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$. 4

α , β , γ যদি $x^3 + qx + r = 0$ সমীকৰণটোৰ মূল হয়, তেন্তে $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ মূলযুক্ত সমীকৰণটো গঠন কৰা।

6. (a) If n is a positive integer greater than 2, then prove that

$$2^n - 1 > n \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} \quad 4$$

যদি n , 2 তকৈ ডাঙৰ ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

$$2^n - 1 > n \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$$

- (b) Prove that if a sequence $\{u_n\}$ converges to l , then every subsequence of $\{u_n\}$ also converges to l .

Examine if the sequence $u_n = \frac{2n-7}{3n+2}$ is monotonic increasing and bounded above. Show that $\{u_n\}$ is a convergent sequence. 3+3=6

যদি এটা অনুক্রম $\{u_n\}$ l লৈ অভিসৰণ কৰে, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে $\{u_n\}$ ৰ প্রতিটো উপঅনুক্রম l লৈ অভিসৰণ কৰে।

$u_n = \frac{2n-7}{3n+2}$ অনুক্রমটো একদিক্ৰিত বৰ্ধমান আৰু উচ্চসীমা থকাৰ পৰীক্ষা কৰা। দেখুওৱা যে $\{u_n\}$ এটা অভিসাৰী অনুক্রম।

Or / নাইবা

- (c) State the Cauchy's general principle of convergence. Use it to show that the sequence $\{u_n\}$ is convergent, if

কছিব অভিসাৰিতাৰ সাধাৰণ মূলসূত্রটো লিখা। ইয়াৰ সহায়ত দেখুওৱা যে $\{u_n\}$ অনুক্রমটো অভিসাৰী, যদিহে

$$u_n = 1 + \frac{1}{\underline{1}} + \frac{1}{\underline{2}} + \frac{1}{\underline{3}} + \dots + \frac{1}{\underline{n}}. \quad 2+4=6$$
